

Компенсация внешних возмущений для линейных многомерных систем с использованием сбалансированного представления модели

Duc Long Hoang

Факультет систем управления и робототехники
Университет ИТМО
Санкт-Петербург, Россия
longhd@mta.edu.vn

Наталья А. Дударенко

Факультет систем управления и робототехники
Университет ИТМО
Санкт-Петербург, Россия
dudarenko@itmo.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача компенсации внешних возмущений для класса многомерных систем с комбинированным управлением. Задача компенсации рассматривается для сбалансированного представления модели системы. Компенсатор синтезируется для случая измеряемого и неизмеряемого вектора состояния, с использованием уравнения типа Сильвестра и наблюдателя состояния. Эффективность предлагаемого подхода проиллюстрирована на примере.

Ключевые слова: внешние возмущения; уравнение Сильвестра; многомерные системы, сбалансированное представление модели; системные грамианы

I. ВВЕДЕНИЕ

Задача компенсации внешних воздействий для случая линейных непрерывных многомерных систем широко исследуется специалистами в области теории автоматического управления. Множество подходов предложено специалистами для решения этой проблемы. В их числе синтез регулятора с интегратором [1], принцип интегральной модели [2], комбинированное управление [3] и его расширенные версии с адаптивным подходом [4, 5]. Задачи синтеза компенсатора и наблюдателя решаются многими научными школами. В работах [3, 4, 5] авторы используют исходную многомерную систему для синтеза компенсатора и наблюдателя, при этом возникают сложности при синтезе регулятора и нахождении матрицы обратных связей. Более того, доказательства сходимости за счет выбора функций Ляпунова достаточно сложны. В работе [6] авторы использовали метод развязки многомерной системы на подсистемы. Однако для реализации данного подхода есть существенные ограничения:

(1) Полуса передаточных функций матрицы $\mathbf{G}$ должны быть различны.

(2) Собственные числа матрицы состояний объекта управления $\mathbf{A}$ и матрицы состояния эталонной модели $\mathbf{\Gamma}$, обеспечивающей желаемое качество процессов, должны быть различны. Данное условие является необходимым для существования решения уравнения типа Сильвестра. Это ограничение является существенным для подхода с развязкой многомерной системы.

(3) Решение уравнения типа Сильвестра существует при условии управляемости пары матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ объекта

управления и наблюдаемости пары матриц $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{H})$ эталонной модели.

(4) При использовании метода развязки преобразованная система имеет больше переменных состояния, чем исходная система. Как следствие, возникают трудности при решении уравнений для обеспечения сходимости выходных процессов.

В данной статье предлагается подход для компенсации внешних воздействий в многомерных линейных непрерывных системах, основанный на адаптивном управлении с приведением модельного описания системы к сбалансированному представлению. Матрицы обратных связей синтезируются с использованием уравнения типа Сильвестра и обеспечивают сходимость выходных переменных системы.

Статья структурирована следующим образом. В разделе 2 изложены основные принципы формирования сбалансированного представления модели. Порядок синтеза компенсатора и наблюдателя представлен в разделе 3, где также вводятся описания эталонной модели системы и модели внешних возмущений. В разделе 4 приводится пример многомерной системы типа двумерный вход-двумерный выход, иллюстрирующий эффективность предлагаемого подхода. Выводы о результатах, представленных в статье, приводятся в разделе 5.

II. СБАЛАНСИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим линейную многомерную систему вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ – вектор входа, вектор переменных состояния и вектор выхода соответственно; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица состояний, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица входов, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ – матрица выхода многомерной системы; $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ – управляемая пара матриц, $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ – наблюдаемая пара матриц.

Введем в рассмотрение системный кросс-грамиан [7] как матрицу Грамиана, которая задает количественную оценку управляемости и наблюдаемости линейной

системы (1). Кросс-грамиан может быть вычислен как решение уравнения типа Сильвестра вида

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_{co} + \mathbf{W}_{co}\mathbf{A} = -\mathbf{B}\mathbf{C} \quad (2)$$

Решение уравнения (2) может быть записано в виде

$$\mathbf{W}_{co} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{C} e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (3)$$

Кросс-грамиан позволяет сформировать сбалансированное модельное представление исходной системы [8, 9], которое будем задавать в следующей форме

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_b(t) = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b(t) + \mathbf{B}_b \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b(t) \end{cases} \quad (4)$$

где $\mathbf{A}_b = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{r \times r}$; $\mathbf{B}_b = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r \times m}$; $\mathbf{C}_b = \mathbf{C}\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $\mathbf{T}$ – матрица преобразования координат, при этом $r \leq n$; $\mathbf{x}_b = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$.

Следует отметить, что собственные числа и поведение выходных переменных исходной модели и ее сбалансированного представления совпадают. Сбалансированное модельное представление системы (4) характеризуется тем, что грамианы управляемости и наблюдаемости диагональны и равны

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix} \quad (5)$$

где $\mathbf{W}_c$ и $\mathbf{W}_o$ – грамианы управляемости и наблюдаемости [7] соответственно, а $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ представляют собой сингулярные числа Ганкеля [8, 9], при этом выполняются соотношения $\mathbf{T}\mathbf{W}_c\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-T}\mathbf{W}_o\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{\Sigma}$.

III. СИНТЕЗ КОМПЕНСАТОРА И НАБЛЮДАТЕЛЯ

A. Синтез компенсатора для многомерных систем при внешних воздействиях

Зададим многомерную систему, функционирующую в условиях внешних воздействий [3] в форме

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6)$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ – вектор входа, вектор состояния и вектор выхода соответственно; $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор внешних возмущений; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ – матрица состояний, матрица входа и матрица выхода соответственно; $\mathbf{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times r}$ – матрица коэффициентов при возмущающих воздействиях; $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ – вектор начальных условий системы.

Эталонную модель системы представим в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathbf{\Gamma}\xi(t) \\ \mathbf{v}(t) = \mathbf{H}\xi(t) \end{cases}, \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (7)$$

где $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния эталонной модели; $\xi(0) = \xi_0$ – вектор начальных условий эталонной модели; $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выходных переменных эталонной модели; $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица, определяющая желаемое качество процессов в системе; $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица выхода эталонной модели.

Модельное описание внешних воздействий сформируем в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{\xi}_f(t) = \mathbf{\Gamma}_f \xi_f(t) \\ \mathbf{f}(t) = \mathbf{H}_f \xi_f(t) \end{cases}, \quad \xi_f(0) = \xi_{f0} \quad (8)$$

где $\xi_f(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния модели внешних возмущений; $\xi_f(0) = \xi_{f0}$ – вектор начальных условий; $\mathbf{\Gamma}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица, определяющая тип внешних воздействий; $\mathbf{H}_f \in \mathbb{R}^{r \times n}$ – матрица выхода.

Сформируем сигнал ошибки компенсации возмущающих воздействий

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{M}_f \xi_f(t) - \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}_e(t) = \mathbf{C}\mathbf{M}_f \xi_f(t) - \mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (9)$$

Тогда выражение (6) для составляющей вектора состояний может быть переписано в форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{H}_f \xi_f(t) \quad (10)$$

Подстановка выражения (10) в (9) позволяет записать

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_e(t) + (\mathbf{M}_f \mathbf{\Gamma}_f - \mathbf{A}\mathbf{M}_f - \mathbf{B}_f \mathbf{H}_f) \xi_f - \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_e(t) = \mathbf{C}\mathbf{M}_f \xi_f(t) - \mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (11)$$

где матрицы $\mathbf{M}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{L}_f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ могут быть вычислены в силу следующих соотношений

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{L}_f + \mathbf{B}_f \mathbf{H}_f = \mathbf{M}_f \mathbf{\Gamma}_f - \mathbf{A}\mathbf{M}_f \\ \mathbf{C}\mathbf{M}_f = \mathbf{0} \end{cases} \quad (12)$$

Тогда модель ошибок примет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}\mathbf{L}_f \xi_f(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_e(t) = \mathbf{C}\mathbf{M}_f \xi_f(t) - \mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (13)$$

Закон управления будем синтезировать в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{L}_f \xi_f(t), \quad (14)$$

где матрица обратных связей $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ может быть найдена как решение следующих уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{H} = \mathbf{M}\mathbf{\Gamma} - \mathbf{A}\mathbf{M} \\ \mathbf{K} = -\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1} \end{cases} \quad (15)$$

После подстановки выражений (15) в закон управления вида (14), модель ошибки принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_e(t) \\ \mathbf{y}_e(t) = \mathbf{C}\mathbf{M}_f \xi_f(t) - \mathbf{y}(t) \end{cases}, \quad (16)$$

и может быть переписан в следующей форме

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}_e(t) \\ \mathbf{y}_e(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_e(t) \end{cases} \quad (17)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$.

Из выражений (17) следует устойчивость системы и сходимости к нулю всех переменных вектора ошибки по состоянию $\mathbf{x}_e(t)$.

В. Синтез наблюдателя для многомерных систем при внешних возмущениях

Введем в рассмотрение расширенную модель системы [3]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_f(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_f(t) \end{cases} \quad (18)$$

где $\mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} \xi_f(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+\eta}$; $\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}] \in \mathbb{R}^{l \times (n+\eta)}$;

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\eta) \times m}; \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \mathbf{H}_f & \mathbf{A} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\eta) \times (n+\eta)}.$$

Тогда расширенный наблюдатель может быть описан следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_f(t) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_f(t) + \bar{\mathbf{L}}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_f(t) \end{cases} \quad (19)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_f(t) = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_f(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+\eta}$ – вектор состояний

наблюдателя; $\bar{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^{(n+\eta) \times l}$ – матрица коэффициентов наблюдателя.

Вектор невязки $\tilde{\mathbf{x}}_f(t)$ представляет собой отклонение вектора состояния наблюдателя $\hat{\mathbf{x}}_f(t)$ от вектора состояния расширенной модели $\mathbf{x}_f(t)$ и может быть вычислен в силу следующего выражения

$$\tilde{\mathbf{x}}_f(t) = \mathbf{x}_f(t) - \hat{\mathbf{x}}_f(t). \quad (20)$$

Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (20) с учетом (18), (19) получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_f(t) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_f(t) - \hat{\mathbf{x}}_f(t)) - \bar{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_f(t) - \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_f(t)) \quad (21)$$

Выражения (20) и (21) позволяют записать

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_f(t) = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})\tilde{\mathbf{x}}_f(t) \quad (22)$$

На основе желаемых показателей качества сформируем расширенную эталонную модель в форме

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}}_H(t) = \bar{\mathbf{\Gamma}}_H \bar{\xi}_H(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_H(t) = \bar{\mathbf{H}}_H \bar{\xi}_H(t) \end{cases} \quad (23)$$

где $\bar{\xi}_H(t) \in \mathbb{R}^{n+\eta}$ – вектор состояния расширенной эталонной модели; $\bar{\mathbf{v}}_H(t)$ – вектор выхода; $\bar{\mathbf{\Gamma}}_H \in \mathbb{R}^{(n+\eta) \times (n+\eta)}$ – матрица, определяющая динамические показатели качества наблюдателя; $\bar{\mathbf{H}}_H \in \mathbb{R}^{l \times (n+\eta)}$ выбрана из условия полной наблюдаемости эталонной модели.

Вычисление матрицы $\bar{\mathbf{L}}$ сводится к решению уравнения типа Сильвестра в виде

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{M}}_H \bar{\mathbf{\Gamma}}_H - \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{M}}_H = \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{H}}_H \\ \bar{\mathbf{L}}^T = -\bar{\mathbf{H}}_H \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \end{cases} \quad (24)$$

Тогда (22) может быть переписано в форме

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_f(t) = \bar{\mathbf{F}}_H \tilde{\mathbf{x}}_f(t) \quad (25)$$

где $\bar{\mathbf{F}}_H = \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}}$.

Вектор невязки $\tilde{\mathbf{x}}_f(t)$ будет стремиться к нулю, если матрица $\bar{\mathbf{F}}_H$ будет гурвицевой. Таким образом, задача синтеза расширенного наблюдателя сводится к вычислению матрицы $\bar{\mathbf{L}}$, которая обеспечивает желаемые собственные значения матрицы $\bar{\mathbf{F}}_H$.

IV. ПРИМЕР

Проиллюстрируем эффективность предлагаемого подхода на примере многомерной системы типа двумерный вход-двумерный выход с передаточной матрицей вида

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{1}{s + 2} \\ 0 & -\frac{1}{s + 2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Будем рассматривать внешние возмущения следующего типа $f_1 = \beta \sin(\omega t + \psi)$ и $f_2 = \alpha = \text{constant}$. Тогда модель внешних воздействий вида (8) будет иметь следующее модельное описание

$$\begin{cases} \dot{\xi}_f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_f(t) \\ \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_f(t) \end{cases} ; \xi_f(0) = \begin{bmatrix} \beta \sin(\psi) \\ \omega \beta \cos(\psi) \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (27)$$

A. Компенсатор для многомерной системы

Найдем грамианы управляемости и наблюдаемости сбалансированного представления системы

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{W}_o = \begin{bmatrix} 0.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0.205 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Зададим внешние возмущения в виде $f_1 = 2 \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ и $f_2 = 3$ и назовем желаемые собственные значения эталонной модели (7) такими, что $\lambda_1^* = -1$, $\lambda_2^* = -2$, $\lambda_3^* = -3$. Графики ошибки и выходных переменных компенсатора представлены на рис. 1.

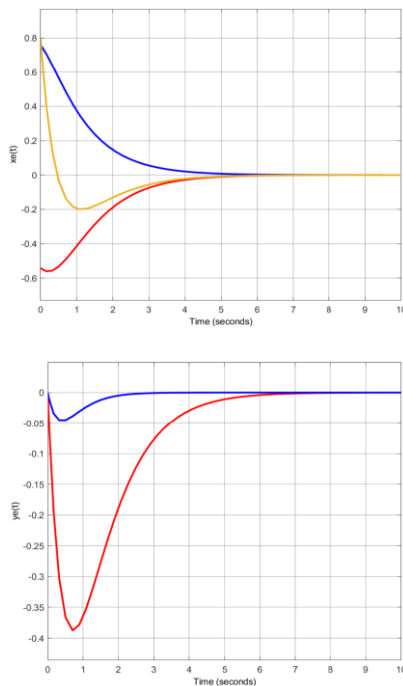


Рис. 1. Графики ошибки и выходных переменных компенсатора

B. Наблюдатель для многомерной системы

Зададим желаемые собственные числа расширенной системы (18) следующим образом: $\lambda_1^* = -1$, $\lambda_2^* = -2$, $\lambda_3^* = -3$, $\lambda_4^* = -15$, $\lambda_5^* = -16$, $\lambda_6^* = -17$. Графики выходных переменных наблюдателя представлены на рис. 2.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен подход к решению задачи компенсации внешних возмущающих воздействий для случая линейных непрерывных многомерных систем,

передаточные функции каналов которой имеют одинаковые полюса. Предлагается использовать сбалансированное представление многомерной системы, которое позволяет получить редуцированное описание исходной модели системы. Синтезированный компенсатор обеспечивает сходимость ошибок и выходных переменных к нулю. Для случая неизмеряемого вектора состояний синтезирован расширенный наблюдатель, обеспечивающий сходимость к нулю выходных переменных, что подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

В дальнейшем авторы планируют расширить полученные результаты на случай многомерных систем, функционирующих в условиях неизвестных внешних возмущений.

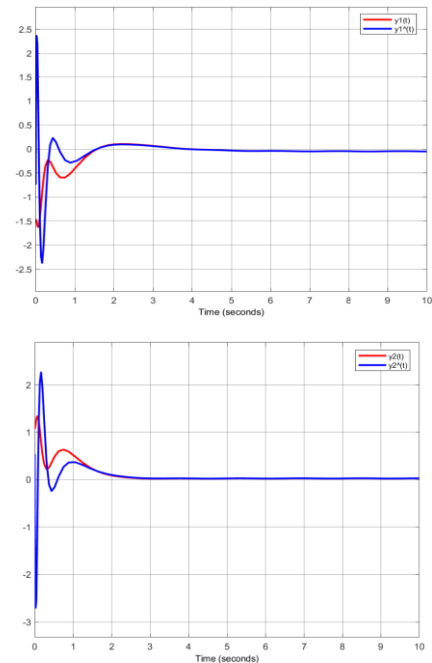


Рис. 2. Графики выходных переменных наблюдателя

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dorf R.C. and Bishop R.H. "Modern Control Systems (13th Edition)". Boston: Pearson, 2016. 1106 p.
- [2] Francis, B.A., Wonham, W.M. "The internal model principle for linear multivariable regulators" // Applied Mathematics and Optimization, 170–194 (1975).
- [3] Григорьев В.В., Бойков В.И., Парамонов А.В., Быстров С.В. Проектирование регуляторов систем управления. СПб: Университет ИТМО, 2021. 95 с.
- [4] Nikiforov V., Gerasimov D. "Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Lecture Notes in Control and Information Sciences", 2022, vol. 491, 358 p.
- [5] Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А. Адаптивное управление возмущенными системами: учебное пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2015. 126 с.
- [6] Hoang D.L., Dudarenko N.A. "Compensation of External Disturbances for MIMO Systems Using Decoupling Model" // Proceedings of the 2023 Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus 2023), pp. 548-553.
- [7] Мироновский Л.А. Моделирование линейных систем. СПб.: ГУАП, 2009. 243с.
- [8] Rafael Bru, Carmen Coll, Nestor Thome. "Gramian matrices and balanced model of generalized systems" // Applied Mathematics and Computation 148, 2004, pp. 341-350.
- [9] Paolo Rapisarda, Jan C. Willems. "Balanced state representations from higher order differential equations" // Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, December 2003, pp. 1633–1638.