Метод равномерной оптимизации управляемых систем с распределенными параметрами

Э. Я. Рапопорт[1], Ю. Э. Плешивцева[2]
Самарский государственный технический университет
[1]edgar.rapoport@mail.ru, [2]yulia_pl@mail.ru

***Аннотация*. Предлагается конструктивный метод решения широкого круга задач оптимального управления техническими системами с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями в частных производных параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход сводится к совокупности процедур последовательной параметризации управляющих воздействий, определяемых с помощью аналитических условий оптимальности, последующей редукции к задаче полубесконечной оптимизации относительно искомого вектора параметров и ее решения альтернансным методом построения параметризируемых алгоритмов программного управления, который распространяет на исследуемые задачи результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использует базовые закономерности предметной области. Полученные результаты обобщаются на задачи с векторным характером критерия оптимальности, ограничений на конечное состояние объекта управления и управляющих воздействий. Предлагается метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов в условиях неприменимости классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества, вместо которых используются конечные значения векторов сопряженных переменных и модальных составляющих управляемой величины в оптимальном процессе, определяемые в результате решения задачи программного управления.**

Ключевые слова: система с распределенными параметрами; равномерная оптимизация; параметризация управляющих воздействий; альтернансный метод; программное оптимальное управление; синтез оптимального управления; векторные задачи оптимального управления

I. Введение

Разработка конструктивных методов решения краевых задач оптимального управления (ЗОУ) по переводу управляемого объекта из заданного начального в требуемое конечное состояние с экстремальным значением заданного критерия качества до настоящего времени остается одной из основных проблем теории систем с распределенными параметрами (СРП). В характерных для технических СРП условиях такая задача оказывается неразрешимой в классической двухточечной схеме с фиксированными концами траекторий движения системы в ее бесконечномерном фазовом пространстве вследствие неуправляемости объекта относительно типичных требований к конечным состояниям СРП или по причине невозможности реализации формальных алгоритмов оптимального управления [1, 2].

При этом известные приближенные методы поиска решений ЗОУ СРП, осуществляемые как правило путем исходной дискретизации моделей СРП, могут привести к существенным потерям по величине критерия оптимальности, или применение этих методов становится невозможным при высоких требованиях к точности моделирования неуправляемой СРП [1].

Эффективный способ преодоления указанных трудностей состоит в переходе к заведомо разрешимой с реализуемыми результатами ЗОУ при заданном целевом множестве в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, которое отвечает, применительно к описанию объекта управления уравнениями в частных производных параболического типа, всегда существующим в приложениях допускам на отклонение ε управляемой величины $Q(X,t)$ в конечный момент времени $t=t^*$ процесса управления от требуемого состояния $Q_c(X)$ в пределах заданной области V изменения пространственных аргументов $X \in V$ [1–3].

В ситуациях, представляющих наибольший интерес для практических приложений, величина ε оценивается в равномерной метрике:

$$\Phi(t^*) = \max_{X \in V} |Q(X,t^*) - Q_c(X)| \le \varepsilon. \qquad (1)$$

II. Программное оптимальное управление

Известные процедуры принципа максимума Понтрягина, распространяемые на бесконечномерные модели описания СРП, в целом ряде ЗОУ позволяют непосредственно определить в условиях (1) параметрическое представление искомых программных управляющих воздействий с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_i^{(N)}), i=\overline{1,N}, N<\infty$, параметров $\Delta_i^{(N)}$, непосредственно характеризующих их структуру в пространственно-временной области определения ("$\Delta^{(N)}$ – параметризация") [1–3].

В более общем случае может быть использован предложенный в [4] способ последовательной параметризации программных управляющих воздействий в ЗОУ СРП на конечномерном подмножестве векторов $\Psi^{(N)} = (\Psi_i(t^*)), i=\overline{1,N}$, финишных значений N первых переменных $\Psi_i(t)$ бесконечной системы сопряженных уравнений краевой задачи принципа максимума при равных нулю остальных величинах $\Psi_i(t^*), i>N$ ("$\Psi^{(N)}$ – параметризация").

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-29-00180, https://rscf.ru/project/22-29-00180/, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Последующее интегрирование уравнений объекта с $\Delta^{(N)}$ или $\Psi^{(N)}$ – параметризированным управлением приводит к параметрическому описанию конечного состояния $Q(X,t^*)$ и критерия оптимальности I в форме явных зависимостей, соответственно $Q(X,S^{(N)})$ и $I(S^{(N)})$ от своих аргументов, где $S^{(N)}=\Delta^{(N)}$ или $S^{(N)}=\Psi^{(N)}$.

В результате осуществляется редукция исходной ЗОУ СРП к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [1–4]:

$$I(S^{(N)})\to\min_{S^{(N)}};\Phi(S^{(N)})=\max_{X\in V}|Q(X,S^{(N)})-Q_c(X)|\le\varepsilon. \quad (2)$$

Размерность N вектора $S^{(N)}$ однозначным образом определяется в зависимости от заданной величины ε в (2):

$$N=\nu,\forall\varepsilon:\varepsilon_{\min}^{(\nu)}\le\varepsilon<\varepsilon_{\min}^{(\nu-1)}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\nu)}=\min_{S^{(\nu)}}\left[\max_{X\in V}\left|Q(X,S^{(\nu)})-Q_c(X)\right|\right],$$

и значения минимакса $\varepsilon_{\min}^{(\nu)}$ образуют убывающую цепочку неравенств с возрастанием ν [1–5].

Решение $S_*^{(N)}$ ЗПО (2), (3) может быть найдено по конструктивной технологии альтернансного метода, распространяющего на рассматриваемые задачи равномерной оптимизации известные результаты теории нелинейных чебышевских приближений в условиях некоторых обычно выполняющихся в приложениях допущений и существенно использующего дополнительную информацию о закономерностях предметной области [1–5].

Метод базируется на специальных альтернансных свойствах $S_*^{(N)}$, согласно которым предельно допустимая величина $\Phi(S_*^{(N)})$ в (2), равная ε, достигается в некоторых точках $X_j^0\in V, j=\overline{1,R}$, число R которых оказывается равным числу всех искомых параметров, включая кроме $S_*^{(N)}$ заведомо неизвестную величину минимакса $\varepsilon_{\min}^{(\nu)}$ в (3), если заданное в (2) значение ε должно быть равно $\varepsilon_{\min}^{(\nu)}$ [1–5]:

$$\begin{aligned}&R=N,\text{если }\varepsilon_{\min}^{(N)}\le\varepsilon<\varepsilon_{\min}^{(N-1)};\\&R=N+1,\text{если }\varepsilon=\varepsilon_{\min}^{(N)}.\end{aligned} \quad (4)$$

При наличии диктуемой закономерностями конкретной предметной области дополнительной информации о конфигурации распределения $Q(X,S_*^{(N)})$ в области $V\ni X$, которая позволяет идентифицировать координаты X_j^0 и знаки $Q(X_j^0,S_*^{(N)})-Q_c(X)$, $j=\overline{1,N}$, альтернансные свойства (4), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(X,S^{(N)})-Q_c(X)$ в точках $X_{jg}^0\in\operatorname{int}V$, где $g=\overline{1,R_1}$; $R_1\le R$ и $X_{jg}^0\in\{X_j^0\}$, приводят к замкнутой относительно всех неизвестных и разрешаемой стандартными численными методами системе уравнений:

$$\begin{aligned}&Q(X_j^0,S_*^{(N)})-Q_c(X_j^0)=\pm\varepsilon,\ j=1,R;\\&\frac{\partial}{\partial X}\left[Q(X_{jg}^0,S_*^{(N)})-Q_c(X_{jg}^0)\right]=0,\ g=\overline{1,R_1},\end{aligned} \quad (5)$$

с однозначно определяемым знаком ε в (5) для каждой из точек X_j^0.

Описанная базовая технология альтернансного метода распространена на широкий круг задач оптимального проектирования и управления по типовым критериям качества технических систем с распределенными параметрами применительно к линейным и нелинейным, аналитическим и цифровым, детерминированным и не полностью определенным моделям СРП различной пространственной размерности с сосредоточенными и пространственно-временными, граничными и внутренними управляющими воздействиями [2, 5–8].

III. Векторные задачи равномерной оптимизации СРП

Характерные оценки эффективности функционирования сложных систем по совокупности различных частных показателей качества $I_p, p=\overline{1,\sigma}, \sigma>1$, приводят к актуальной задаче многокритериальной оптимизации (ЗМО). Переход с помощью соответствующих процедур нормирования к относительным равнозначным оценкам λ_p величин I_p позволяет осуществить путем минимаксной свертки λ_p процедуру точной редукции исходной ЗМО к однокритериальной вариационной задаче с дополнительными ограничениями на значения λ_p, решение которой заведомо является Парето-эффективным решением ЗМО [9, 10]. Последующая $S^{(N)}$-параметризация управляющих воздействий приводит к ЗПО, усложняемой по сравнению с (2) дополнительными ограничениями на λ_p [9, 10]:

$$\begin{aligned}&I=\lambda^0(S^{(N)})\to\min_{S^{(N)}};\\&\Phi(S^{(N)})\le\varepsilon\le\varepsilon_p;\\&\lambda_p(S^{(N)})\le\lambda^0,\ p=\overline{1,\sigma},\end{aligned} \quad (6)$$

где ε_p – значения ε, заданные в частных задачах оптимизации и λ^0 – искомая постоянная. В [9, 10] предложен способ решения ЗПО (6) альтернансным методом. Полученные результаты распространены на не полностью определенные модели СРП [10].

Наряду с ЗОУ СРП, рассматриваемых в условиях (1), самостоятельный интерес представляет их расширенная постановка с одновременно предъявляемыми различными ограничениями вида (1) [11]:

$$\begin{aligned}&\Phi_k(S^{(N)})=\max_{X\in V}|F_k(Q(X,S^{(N)}))-Q_{ck}(X)|\le\varepsilon_k;\\&k=\overline{1,w},w>1,\end{aligned} \quad (7)$$

где F_k – заданные функции своих аргументов и $F_1 = Q(X, S^{(N)})$.

Линейная свертка заданных ограничений в (7), нормируемых предлагаемым способом, позволяет осуществить редукцию искомой ЗОУ СРП к ЗПО с одним эквивалентным ограничением специального вида [11].

Разработан конструктивный вычислительный алгоритм решения такой ЗПО по схеме альтернансного метода в усложненных условиях выполнения альтернансных свойств $S_*^{(N)}$ в различных точках $X_j^0 \in V$ на различных активных ограничениях в (7) [11].

Целый ряд ЗОУ СРП с автономными $(\rho = 1)$ или взаимосвязанными $(\rho > 1)$ объектами управления формулируется в условиях многоканальных управляющих воздействий (УВ). После их параметризации эти задачи редуцируются к ЗПО вида (2) усложненной структуры [12]:

$$I(S^{(N)}) \to \min_{S^{(N)}};$$
$$\max_{X \in V} |Q_m(X_m, S^{(N)}) - Q_{cm}(X_m)| \le \varepsilon_m, \ \mathrm{m} = \overline{1, \rho}, \tag{8}$$

где размерность $N = \sum_{m=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{l_m} N_{l_m}$ вектора $S^{(N)}$ определяется как числом ρ управляемых объектов, так и числом l_m компонентов УВ, каждый из которых характеризуется N_{l_m} параметрами. ЗПО (8) может быть решена по модифицированной схеме альтернансного метода, отличающейся от одноканального управления увеличенной размерностью $S_*^{(N)}$, требованием одинаковой длительности процесса управления для всех составляющих УВ, наличием различных вариантов выбора N_{l_m} и N, усложненным характером пространственной конфигурации $Q_m(X, S_*^{(N)}), m = \overline{1, \rho}$ и процедурами детализации альтернансных свойств $S_*^{(N)}$ для различных возможных альтернатив [12].

Предлагаемый метод апробирован на целом ряде актуальных задач оптимизации процессов технологической теплофизики, в том числе, оптимального проектирования и управления температурными режимами энергоемких электротермических установок в технологических комплексах обработки металла давлением [1–3,13–16].

IV. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов

Проблема синтеза оптимального управления существенно усложняется в ЗОУ с оцениваемым в равномерной метрике целевым множеством (1) конечных состояний СРП, на негладкой границе которого неприменимы классические условия трансверсальности [2, 6–8, 13].

Вместо таких условий могут быть использованы конечные значения $\overline{Q^*}(t^*) = (Q_n^*(t^*)), n = 1, 2, ...$ и $\Psi^*(t^*) = (\Psi_n^*(t^*)), n = 1, 2, ...$ векторов $\overline{Q^*}(t^*)$ модальных составляющих $Q_n(t)$ управляемой величины и сопряженных переменных $\Psi^*(t)$ в оптимальном процессе, предварительно определяемых решением альтернансным методом задачи программного управления [6–8].

Применительно к типичным линейно-квадратичным ЗОУ СРП решение краевой задачи принципа максимума определяет в открытой области изменения управляющих воздействий линейные зависимости $\overline{Q^*}(t^*)$ и $\Psi^*(t^*)$ от текущих значений $\overline{Q^*}(t)$ и $\Psi^*(t), t \in [0, t^*]$ с коэффициентами в виде элементов блочного описания матричной экспоненты. Взвешенная алгебраическая сумма этих зависимостей приводит к линейному закону синтеза оптимального управления, являющегося линейной функцией сопряженных переменных, с нестационарными коэффициентами обратной связи по состоянию $\overline{Q}(t)$ [6–8]. Последующий переход от $\overline{Q}(t)$ к обратной связи по измеряемому выходу объекта осуществляется построением наблюдателя полного или пониженного порядка.

Соответствующий алгоритм оптимального управления с сосредоточенным граничным или внутренним управляющим воздействием $U(\overline{Q}(t), t)$ представляется в следующем виде [6]:

$$U^*(\overline{Q}(t), t) = T_1(t) T_2(t) \overline{Q}(t), \tag{9}$$

где матрицы $T_1(t)$ и $T_2(t)$ вычисляются по найденным зависимостям от t, $\overline{Q^*}(t^*), \Psi^*(t^*)$ и $\overline{Q}(0)$ [6].

Предлагаемый метод синтеза в ЗОУ СРП распространен на задачи с детерминированными и множественными возмущениями [6], пространственно-временными управляющими воздействиями [7] и интервальными неопределенностями параметрических характеристик объекта [8].

V. Заключение

Предложен алгоритмически точный метод равномерной оптимизации технических систем с распределенными параметрами параболического типа.

Разработанная конструктивная технология решения задач программного и позиционного управления СРП параболического типа может быть использована применительно к достаточно широкому кругу конкретных задач равномерной оптимизации управляемых технических систем с распределенными параметрами с привлечением базовых закономерностей соответствующей предметной области.

Список литературы

[1] Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009. 677 с.

[2] Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.

[3] Рапопорт Э.Я. Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2021. 336 с.

[4] Yu.E. Pleshivtseva, E.Ya. Rapoport. The successive parameterization method of control actions in boundary value optimal control problems for distributed parameter systems // The Journal of Computer and System Sciences International (A Journal of Optimization and Control). 2009. Vol. 48. №3. Pp. 351-362.

[5] Рапопорт Э.Я. Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2022. Т. 26. №3. С. 419-445.

[6] Rapoport E.Ya. Analytical Design of the Optimal Controllers in Linear-Quadratic Problems with Distributed Parameters under Uniform Estimates of Target Sets // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2021. Vol. 60. No. 3. Pp. 364-378.

[7] Yu.E. Pleshivtseva, E.Ya. Rapoport. Spatiotemporal Control of Systems with Distributed Parameters in Linear-Quadratic Optimization Problems with Uniform Estimates of Target Sets // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2022. Vol. 61. No. 4. Pp. 523-538.

[8] Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2023. № 1. С. 56-71.

[9] E.Ya. Rapoport, Yu.E. Pleshivtseva. Technology of Solving Multi-Objective Problems of Control of Systems with Distribated Peremeters // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2017. Vol. 53. №4. Pp. 316-328.

[10] E.Ya. Rapoport, Yu.E. Pleshivtseva. Multi-Objective Control of Distributed Parameter Systems in the Case of Interval Uncertainty of the Plant Characteristics // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2019. Vol. 55. №4. Pp. 317-330.

[11] Yu.E. Pleshivtseva, E.Ya. Rapoport. Parametric Optimization of Systems with Distributed Parameters in Problems with Mixed Constraints on the Final States of the Object of Control // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2018. Vol. 57. №5. Pp. 723-737.

[12] E.Ya. Rapoport. Method for Parametric Optimization in Problems of the Multichannel Control of Systems with Distributed Parameters // Journal of Computer and Systems Sciences International volume. 2019. Vol. 58. Pp. 545-559.

[13] Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 279 с.

[14] Rapoport E., Pleshivtseva Yu. Optimal Control of Induction Heating Processes, L., N.Y.: CRS Press, Taylor & Francis Group, Boca Ration, 2007. 348 p.

[15] Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М: Наука, 2012. 309 с.

[16] Yu. Pleshivtseva, E. Rapoport, B. Nacke, A. Nikanorov, P. Di Barba, M. Forzan, E. Sieni, S. Lupi. Design and Control of Electrotechnological Systems: a Multi-objective Optimization Approach // The International Journal of Competation and Mathematics in Electrical Engineering. 2020. Vol. 39. №1. Pp. 239-247.