Минимаксная оптимизация в многомерных обратных задачах теплопроводности

А. Н. Дилигенская[1], С. А. Колпащиков, И. С. Бочкарева
Самарский государственный технический университет
[1]adiligenskaya@mail.ru

***Аннотация.* Исследуется методология решения обратных задач теплопроводности на основе параметрической оптимизации идентифицируемых величин в равномерной метрике оценивания. Приведен анализ применения методологии параметрической идентификации при решении одномерных и многомерных граничных обратных задач теплопроводности. Предварительная параметризация идентифицируемых характеристик в сочетании с альтернансными свойствами оптимальных решений позволяет найти решение на замкнутых компактных множествах параметров.**

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, модальное описание, оптимальное управление, задача параметрической оптимизации

I. Введение

Теория решения обратных задач математической физики [1, 2] позволяет конкретизировать вид математического описания управляемого объекта с распределенными параметрами или исследуемого технологического процесса, в реальных условиях всегда обладающего неопределенностью, и зачастую является максимально эффективным или даже единственным средством идентификации математических моделей. В связи с этим, в настоящее время в рамках теории обратных и некорректных задач развиваются разные подходы и методы, основанные на различном математическом аппарате [3, 4].

Одним из перспективных направлений в методологии решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ) является подход, основанный на последовательной минимаксной оптимизации идентифицируемых величин и соответствующих им температурных состояний [5, 6]. Этот подход обоснован, разработан и апробирован на широком спектре одномерных ОЗТ, применяемых в первом приближении для исследования процессов теплообмена. Вместе с тем, данный подход может быть распространен с учетом основных особенностей на объекты и системы, заданные в многомерной пространственной области, представляющие наибольшую актуальность для реальных технических приложений в области технологической теплофизики.

II. Особенности постановки и решения двумерных обратных задач теплопроводности

Решение ОЗТ на основе методологии минимаксной оптимизации обобщенно может быть сведено к следующей последовательности действий:

- экстремальная постановка задачи с минимаксным критерием оптимизации, минимизирующим температурную невязку между модельным значением, рассчитанным на интервале идентификации в некоторой точке контроля температуры и дополнительной информацией о температурном распределении, полученном при тех же теплофизических условиях и отображающем желаемое (в задачах проектирования) или экспериментальное (в задачах идентификации) состояние (этап 1);
- сужение множества идентифицируемой величины до класса корректности в виде компактного множества физически обоснованных функций (этап 2);
- редукция ОЗТ к задаче полубесконечной оптимизации относительно вектора параметров соответствующего параметрического представления искомой характеристики (этап 3);
- поиск оптимальных значений вектора параметров на базе альтернансных соотношений, сформулированных для идентифицируемых состояний (этап 4).

Методы решения некоторых граничных ОЗТ, рассматриваемых на двумерных пространственных областях, приведены в [7, 8], при этом распространение методологии решения ОЗТ на основе параметрической оптимизации на многомерные задачи имеет следующие особенности.

Метод, представленный в статье [7], показывает вполне удовлетворительные результаты при идентификации функции двух переменных, заданной в форме произведения двух функций одной переменной. В качестве входной информации для решения обратной задачи должна быть предоставлена информация о температуре, полученной на интервале идентификации на линии контроля (по области изменения одной из пространственных координат при фиксированной второй координате).

В работе [8] идентифицируемая величина ищется в виде конечной взвешенной суммы временных модальных составляющих, вычисляемых на основе разложения температурного поля в ряд по собственным функциям начально-краевой задачи. Решение задачи планирования эксперимента (определения координат точек контроля, число которых задается по количеству модальных составляющих в усеченном представлении) обеспечивает минимаксное значение ошибки аппроксимации заданного состояния на линии контроля температуры в фиксированный момент времени.

Эти подходы основаны на результатах теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами [9–11], позволяют отыскать решение на последовательно сходящихся компактных множествах

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00521, https://rscf.ru/project/23-29-00521/

физически реализуемых функций с удовлетворительной точностью, не требуя применения численных регуляризирующих алгоритмов. Тем не менее, остается актуальной задача разработки универсального подхода, обладающего общими принципами и позволяющего находить решение при минимальном числе точек контроля.

III. Минимаксная оптимизация в двумерных обратных задачах теплопроводности

Двумерная ОЗТ, подобно соответствующим одномерным задачам, формулируется в экстремальной постановке, где математическая модель процесса теплообмена задана на основе уравнения теплопроводности в аналитической или численной форме, и содержит одну неизвестную характеристику, которую необходимо восстановить по результатам температурных измерений на временном интервале идентификации в одной точке контроля температуры.

Далее для общности рассуждений рассматривается аналитическая модель процесса теплопроводности с внутренним тепловыделением в относительных единицах

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} + F(x,y)u(t),$$
$$x \in (0,1), y \in (0,1), t \in \left(0, t^0\right], \tag{1}$$

$$T(x,y,0) = 0; \frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial T(1,y,t)}{\partial x} =$$
$$= \beta \frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = \beta \frac{\partial T(x,1,t)}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Здесь β – коэффициент формы, задающий геометрическое соотношение областей изменения пространственных переменных.

Дополнительная информация задана в виде температурной кривой $T^*(t) = T(x^*, y^*, t)$, полученной на рассматриваемом временном интервале в некоторой фиксированной точке $\left(x^*, y^*\right) \in [0,1] \times [0,1]$.

Этап 1. Формулируется внутренняя ОЗТ, в которой требуется восстановить информацию о функции внутреннего тепловыделения. Идентифицируемой величиной g может быть мощность источников тепла $g = g(t) = u(t) \in V_1$ или закон их пространственного распределения $g = g(x,y) = F(x,y) \in V_2$. Задача сформулирована в минимаксной постановке

$$I_0(g) = \max_{t \in [0,t^*]} \left| T_M(x^*, y^*, t, g) - T^*(t) \right| \to \min_{g \in V}. \tag{3}$$

Этап 2. В задаче поиска сосредоточенной характеристики $u(t)$ компактное множество, описывающее класс решений, задается исходя из степени гладкости функций (рассматриваются функции непрерывные вместе с их производными). Необходимым условием для решения ОЗТ является соответствие классу непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций.

В задаче отыскания пространственно распределенной функции $F(x,y)$, зависящей, в свою очередь, от двух пространственных переменных, искомое воздействие представляется на основе модального описания в форме разложения по собственным функциям относительно временных мод, для которых может быть записана бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем самым, эта функция также принадлежит классу непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций.

На этапе 3 с помощью методов теории оптимального управления получено параметрическое представление идентифицируемого воздействия $g = g(\Delta)$ на выбранном классе функций V_1 или V_2. Так, в случае $g(t) = u(t)$ при решении задачи (3) осуществляется переход к кусочно-параболической или полиномиальной функции времени, вектор $\Delta = \left(\Delta_1, ..., \Delta_N\right)$ коэффициентов параметрического представления которой однозначно определяется количеством N используемых параметров.

При определении пространственно распределенной функции $F(x,y)$ используется её модальное представление в виде усеченного двойного ряда

$$F(x,y) = \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} f(\mu_m, \eta_n) \cos \mu_m x \cos \eta_n y$$

разложения по собственным функциям $\cos \mu_m x, \cos \eta_n y$ объекта с известными собственными числами $\mu_m^2 = \pi^2 m^2, \eta_m^2 = \pi^2 \eta^2, m = \overline{0, N_1}, n = \overline{0, N_2}$. Тем самым, коэффициенты $f\left(\mu_m, \eta_n\right)$ и являются искомыми параметрами параметрического представления идентифицируемой функции в задаче (3).

С использованием полученного параметрического представления идентифицируемой характеристики на основе общего решения задачи теплопроводности (1), (2), осуществляется переход к параметризованной форме температурного поля $T_M(x,y,t,\Delta)$, которая используется для расчета температурной кривой $T_M(x^*, y^*, t, g)$ в точке контроля температуры на интервале идентификации. Тем самым, осуществляется переход от задачи (3) к соответствующей задаче параметрической оптимизации

$$I_1(\Delta) = \max_{t \in [0,t^*]} \left| T_M(x^*, y^*, t, \Delta) - T^*(t) \right| \to \min_{\Delta}. \tag{4}$$

Таким образом, исходная некорректно поставленная ОЗТ сведена к задаче математического программирования (4) относительно конечномерного вектора параметров Δ.

Этап 4. Сформулированная задача (4) решается согласно [12, 13] с использованием альтернансных свойств оптимальных решений, применяемых к температурной невязке $T_M(x^*, y^*, t, \Delta) - T^*(t)$ на заданном временном интервале, что приводит к замкнутой относительно всех неизвестных системе расчетных соотношений

$$T_M(x^*, y^*, t_j, \Delta) - T^*(t_j) = (-1)^{j+1}\gamma I_1(\Delta);$$
$$j = \overline{1, N+1}; \gamma = \pm 1; \qquad (5)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(T_M(x^*, y^*, t_k, \Delta) - T^*(t_k)\Big) = 0; \quad t_k \in \{t_j\}.$$

Согласно [12, 13], количество точек альтернанса на единицу превышает число искомых параметров. В задаче поиска величины $u(t)$ класс решений обычно задается в виде кусочно-параболической или полиномиальной функции одной координаты, на основе чего определено число N искомых параметров и вектор их значений Δ. Такая задача является типовой при решении ОЗТ на основе минимаксной оптимизации. При поиске функции двух координат $F(x,y)$ число искомых параметров идентифицируемой характеристики соответствует увеличенной размерности $N = N_1 \times N_2$, и решение соответствующей замкнутой системы уравнений может вызывать определенные сложности при численной реализации. Тем не менее, метод решения, основанный на альтернансных свойствах оптимальных состояний, его основные положения сохраняют основные положения с учетом увеличенной размерности вектора параметров и системы расчетных соотношений.

IV. Результаты минимаксной оптимизации в двумерных обратных задачах

На основе изложенного метода были решены обратные задачи теплопроводности по восстановлению искомых характеристик функции внутреннего тепловыделения: сосредоточенной мощности $u(t)$ и закона пространственного распределения источников тепла $F(x,y)$ с использованием двумерной аналитической модели процесса теплопроводности (1), (2).

Температурная кривая $T^*(t) = T(x^*, y^*, t)$, используемая в качестве входной информации для решения обратной задачи, была получена в результате вычислительного эксперимента по моделированию температурного поля при задании характерного поведения идентифицируемых воздействий $u^0(t) = k\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$ и $F^0(x,y) = \delta(x-1) + \beta\delta(y-1)$, где δ – дельта-функция.

Далее, согласно изложенной методике, были решены обратные задачи по идентификации искомых характеристик в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций.

Некоторые результаты решения ОЗТ представлены на рис. 1–3.

На рис. 1, 2 приведены результаты решения модельной задачи восстановления сосредоточенного воздействия $u(t)$ при числе искомых параметров N=4.

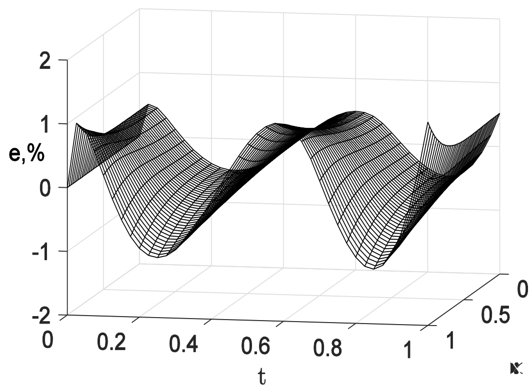

Рис. 1. Температурная невязка $T_M(x,1,t,\Delta) - T^*(x,1,t)$ на границе y=1 в процессе идентификации при N=4 в задаче идентификации $u(t)$

Рис. 1 демонстрирует конфигурацию погрешности $T_M(x,1,t,\Delta) - T^*(x,1,t)$ аппроксимации температурного состояния, соответствующего заданному характеру $u^0(t)$ в области $x \in [0,1]; y^* = 1$ в процессе идентификации, что возможно только в модельной задаче.

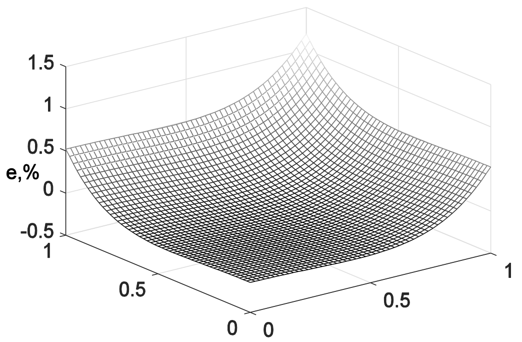

Рис. 2. Температурная невязка $T_M(x,y,t^*,\Delta) - T^*(x,y,t^*)$ в конечный момент времени в области $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

На рис. 2 изображено отклонение $T_M(x,y,t^*,\Delta) - T^*(x,y,t^*)$ в результирующий момент времени во всей двумерной области. Полученные результаты показывают возможность равномерного приближения не только в одной контролируемой точке $\left(x^*, y^*\right)$, но и во всей двумерной области.

Аналогичные результаты, приведенные на рис. 3, получены в задаче восстановления пространственно-временной функции $F(x,y)$ при выбранных значениях $N_1, N_2 = 2$. На рисунке приведена форма распределения температурного отклонения модельного решения от состояния, соответствующего функции $F^0(x,y)$.

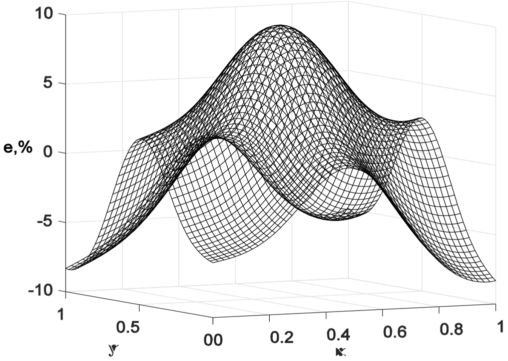

Рис. 3. Температурная невязка $T_M(x,y,t^*,\Delta)-T^*(x,y,t^*)$ в конечный момент времени в области $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ в задаче поиска $F(x,y)$

Тем самым, методология минимаксной оптимизации на последовательно сходящихся множествах непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций позволяет восстанавливать неизвестные характеристики функции внутреннего тепловыделения при оценивании температурной невязки в равномерной метрике по результатам измерения температуры в одной точке контроля.

Решение систем расчетных уравнений, составленных на базе альтернансных свойств для температурной невязки в точке контроля температуры позволяет восстанавливать температурное состояние во всей двумерной области. С увеличением числа учитываемых параметров в полученной на основе модального представления форме описания температурного поля ошибка аппроксимации уменьшается, в пределе стремясь к нулю. При этом, удовлетворительная точность решения ОЗТ, характерная для практических инженерных приложений, может быть получена уже при $N=2{,}3$ в задаче определения $\boldsymbol{u(t)}$ или при $N=8{,}9$ в случае поиска $F(x,y)$.

V. Заключение

Изложенный подход на основе минимаксной оптимизации позволяет восстанавливать неизвестную сосредоточенную или пространственно распределенную характеристику и соответствующее ей температурное состояние в двумерной области изменения пространственных координат по результатам измерения температуры в одной точке контроля температуры.

Основные положения представленного метода могут быть распространены на другие типы обратных задач теплопроводности: граничную, начальную задачи, на численные модели, учитывающие нелинейные свойства теплофизических параметров, а также на тела сложной геометрической формы. Для более точного решения задачи нужно увеличивать число значимых параметров в полученном параметрическом представлении температурного состояния, что приводит к усложнению численной реализации процедуры поиска решений системы расчетных трансцендентных уравнений. Регулярный характер решения, обладающий сходимостью к искомой функции, и альтернансные свойства оптимальных распределений сохраняют свои основные особенности.

Список литературы

[1] Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.

[2] Ozisik M.N., Orlande H.R. B. Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications. New York: Taylor, Francis, 2000.

[3] Keith A. Woodbury, Hamidreza Najafi, Filippo de Monte, James V. Beck. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. John Wiley & Sons, Inc. 2023.

[4] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.

[5] Дилигенская А.Н., Рапопорт Э.Я. Аналитические условия оптимальности в обратных задачах теплопроводности. ТВТ, 2021, 59:3. С. 401–410.

[6] Дилигенская А.Н. Методы последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики // В сборнике: Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Труды XXI Международной конференции. 2019. С. 132-135.

[7] Дилигенская А.Н. Метод минимаксной оптимизации в двумерной граничной обратной задаче теплопроводности. ТВТ, 2019, 57:2. С. 226–233.

[8] Рапопорт Э.Я., Дилигенская А.Н. Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018, Т. 22, № 2. С. 380–394.

[9] Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.

[10] Лившиц М.Ю. Постановочные проблемы задач оптимального управления объектами с распределенными координатами // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ, 2015, № 8. С. 49-52.

[11] Демиденко Н.Д., Потапов В.И., Шокин Ю.И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 2006, 550 с.

[12] Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Альтернансный метод в векторных задачах параметрической оптимизации систем с распределѐнными параметрами // Онтология проектирования, 2018, Т. 8, № 4(30). С.615-627.

[13] Рапопорт Э.Я. Теория и приложения альтернансного метода параметрической оптимизации в задачах управления динамическими системами по принципу гарантированного результата // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. Науки, 2005, № 33. С. 346-353.