

# Применение решения обратной задачи оптимальной стабилизации для коррекции регулятора системы с векторным управлением

В. В. Афонин<sup>1</sup>, П. А. Мишин, П. А. Мишина

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва  
<sup>1</sup>vvafonin53@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматриваются модели систем автоматического управления, для которых осуществляется коррекция регулятора в обратной связи. Корректируемые регуляторы предварительно конструируются с помощью решения задачи модального управления. Далее на основе специального соотношения оптимальности выполняется поиск матричных весовых коэффициентов квадратичного функционала, что позволит скорректировать модальный регулятор. Результат коррекции оценивается по длительности переходных процессов, которая существенно уменьшается.

**Ключевые слова:** соотношение оптимальности; САУ с векторным управлением; коррекция; регулятор; квадратичный функционал; длительность переходного процесса; численные решения

## I. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе для нахождения решения обратной задачи оптимальной стабилизации ключевой формулой является специальное соотношение оптимальности [1, 2]. Соотношение оптимальности связывает между собой характеристики объекта ( $A$ ,  $B$ ), регулятора ( $Q$ ,  $R$ ) и матрицу оптимального управления  $K_p$ .

В замкнутой системе управления, с помощью весовых коэффициентов квадратичного функционала качества  $Q$  и  $R$ , можно влиять на переходный процесс, его качество. В задаче о линейно-квадратичном регуляторе (задаче оптимального управления) весовые коэффициенты заведомо известны. При этом? стоит отметить, их выбор не является тривиальной задачей. Авторами предложен подход для определения весовых коэффициентов функционала, основанный на знании модального регулятора и численном решении [3, 4] соотношения оптимальности. Вектор состояния объекта управления, в данном случае, принимается полностью доступным для измерения. Результирующие матрицы  $Q$  и  $R$  позволяют произвести коррекцию модального регулятора путем решения прямой задачи оптимальной стабилизации. Включение нового (скорректированного) регулятора в систему позволит существенно уменьшить время переходного процесса.

## II. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Задачи стабилизации нередко решаются в практике управления динамическими системами. Модальный является одним из возможных подходов к решению данного типа задач. Замкнутые на модальный регулятор моды (полоса) совпадают с назначенным ранее проектировщиком [5–9]. Для стабилизации систем типа SISO (single input single output) применяется формула Аккермана [5, 8, 9]. Стоит также отметить работы [6, 7],

в которых авторы предлагают подходы к выбору полюсов замкнутой системы для систем типа ММО (multiple input multiple output).

Задача оптимальной стабилизации решается в случае оптимизации переходных процессов и также находит широкое применение [10–12]. Решение данной задачи основано на решении матричного нелинейного уравнения Риккати, которое связывает оптимальный регулятор и весовые коэффициенты квадратичного функционала [5, 11]. Широко распространены задачи такого типа с векторным управлением [13] и со скалярным управлением [1, 14]. Конкретная физическая задача рассматривается в работе [10], решение которой осуществляется в терминах задач стабилизации и назначением полюсов замкнутой системы.

## III. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### A. Материалы и методы

Математическая модель линейного стационарного объекта описывается следующими уравнениями состояния и выхода

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad (1)$$

$$Y(t) = CX(t), \quad (2)$$

где  $X(t)$  –  $n$ -мерный вектор состояния объекта управления,  $U(t)$  –  $r$ -мерный вектор управления,  $A$  – постоянная числовая матрица размера  $n \times n$ ,  $B$  – постоянная числовая матрица размера  $n \times r$ ,  $Y$  –  $m$ -мерный вектор выхода,  $C$  – постоянная числовая матрица размера  $m \times n$ .

С целью дальнейшего применения методов стабилизации, необходимо, чтобы для объекта (1–2) выполнялось условие полной управляемости по Калману [5]

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n,$$

где  $B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B$  – матрица управляемости.

Функционал качества, который характеризует качество переходных процессов, в задаче стабилизации принимается в следующем виде

$$J = \int_0^{\infty} [X^T QX + U^T RU] dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $Q$  – неотрицательно определенная числовая матрица размера  $n \times n$ ,  $R$  – положительно определенная числовая матрица размера  $r \times r$ ,  $T$  – символ транспонирования.

Задачу (1; 3) можно свести к решению линейных матричных неравенств [15], для того чтобы упростить процесс поиска решений. Однако авторы придерживаются подхода, который в инженерном плане является более понятным и имеет более упрощенное решение. Данный подход базируется на решении матричного нелинейного алгебраического уравнения Риккати [11], что позволяет вычислить статические коэффициенты матрицы оптимального регулятора (оптимальной матрицы усиления)  $K_p$ , на которую замыкается заданный объект управления (1).

Синтезированная (замкнутая) система с оптимальным регулятором и приложенным к ней входным управлением (воздействием)  $U(t)$  будет представлена следующим образом

$$\dot{X}(t) = (A - BK_p)X(t) + BU(t), \quad (4)$$

где  $(A - BK_p)$  является гурвицевой матрицей.

При замыкании объекта управления на модальный регулятор (в случае модального синтеза) замкнутая система будет иметь структуру аналогичную (4) с заменой  $K_p$  на  $K_m$ . Вместе с тем собственные числа матрицы состояния  $(A - BK_m)$  системы типа (4) должны быть равны выбранным проектировщиком или заданным предварительно до начала синтеза. В таком случае придется решать задачу по расположению полюсов замкнутой системы [10, 12].

Ниже приводится одно из соотношений оптимальности, которое относится к задачам стабилизации с векторным управлением:

$$R = B^T S^T QSB + (E + B^T S^T K^T)R(E + KSB), \quad (5)$$

где  $S = (A - BK_p)^{-1}$ ,  $K = K_p$ ,  $E$  – единичная квадратная матрица, размерности  $r \times r$ . Для матрицы  $S$  рекомендуется использовать псевдообращение Мура–Пенроуза [16]. Данный подход позволяет избежать некорректных результатов, когда матрицы плохо обусловленные.

### В. Результаты исследования

В качестве примера рассмотрим модельный объект схожий с объектом из работы [14].

Матрица состояния:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1143 & 0.0863 & 1.2796 \\ 0.1431 & -0.7640 & 1.1695 \\ 0.4055 & -1.6547 & -0.3801 \end{bmatrix}$$

Матрица входа:

$$B = \begin{bmatrix} 0.4601 & 0.2893 \\ 0.6301 & 0.0655 \\ 0.6593 & 0.5667 \end{bmatrix}$$

Матрица выхода:

$$C = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Матрица связи  $D = 0$ .

Вектор начальных условий:

$$X(0) = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Допущения для начальных условий весовых коэффициентов:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3139 & 0.7877 & 0.7921 \\ 0.0611 & 0.8613 & 0.7968 \\ 0.4613 & 0.0333 & 0.3061 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.3360 & 0.4285 \\ 0.0176 & 0.5261 \end{bmatrix}$$

Коэффициенты матрицы модального управления:

$$K_m = \begin{bmatrix} 0.1348 & -0.3335 & 2.0481 \\ 0.6022 & -2.4093 & -2.1960 \end{bmatrix}$$

Первым этапом решения является вычисление результирующих матриц  $Q$  и  $R$  на основе соотношения оптимальности с модальным регулятором. Для расчета данных матриц применялся алгоритм численного решения Левенберга-Марквардта. Ниже представлены искомые величины:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0018 \\ 0.0000 & 0.0018 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Теперь на основе полученных весовых коэффициентов квадратичного функционала необходимо решить прямую задачу оптимальной стабилизации. Опираясь на результаты работы [17], авторы отдают предпочтение подходу, основанному на вариационной задаче Лагранжа.

Коэффициенты матрицы оптимального (скорректированного) регулятора:

$$K_p = \begin{bmatrix} 3.4761 & 1.1590 & -0.0587 \\ -7836.7552 & -3087.9742 & 58.2083 \end{bmatrix}$$

Время регулирования системы с модальным управлением: 34.93 с.

Время регулирования системы с оптимальным управлением: 1.29 с.

Диаграммы переходных процессов по всем переменным состояния объекта управления (1) для системы с модальным (рис. 1) и оптимальным (рис. 2) регуляторами приведены ниже:

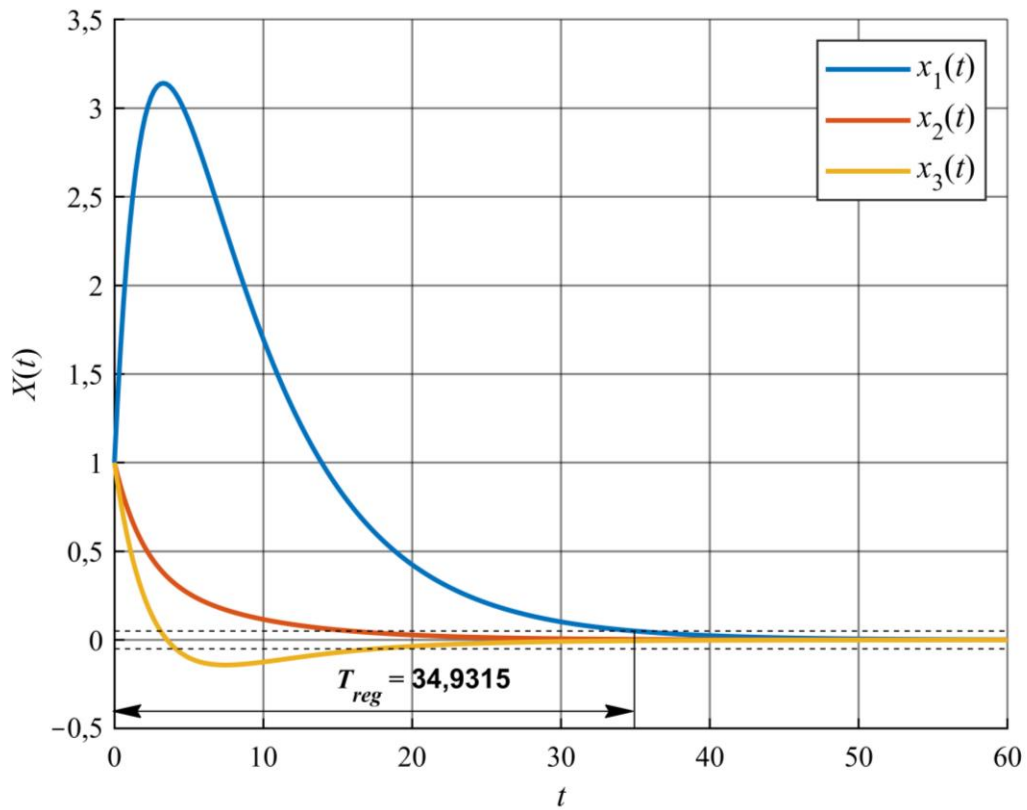


Рис. 1. Переходные функции системы 3-го порядка с модальным регулятором

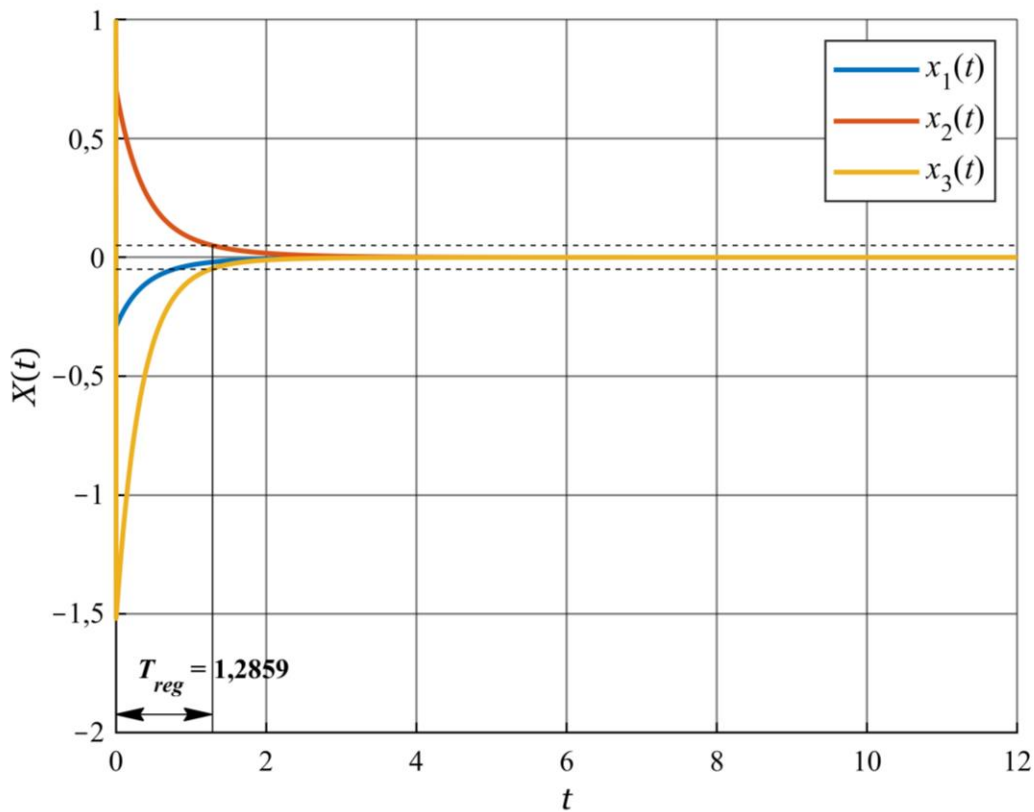


Рис. 2. Переходные функции системы 3-го порядка с оптимальным регулятором

Диапазон допустимого отклонения переходных функций от установившегося значения, для наглядности, рассчитывался относительно начальных условий путем уменьшения максимального значения на 95%. В данном случае время регулирования (длительность переходного процесса) будет определено

в тот момент времени, когда значение всех переходных функций станет по абсолютной величине меньше 0.05 и в дальнейшем это условие не будет нарушено.

#### IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Даже небольшой обзор литературных источников показывает, что задача стабилизации динамических объектов управления широко распространена.

При различных постановках и подходах к решению обратная задача оптимальной стабилизации находит свое отражение в публикациях многих авторов, что подчеркивает актуальность данной проблемы.

На основе соотношения оптимальности с поиском весовых матриц квадратичного функционала удалось существенно снизить время переходных процессов  $T_{reg}$  по всем переменным состояниям объекта с оптимальной обратной связью. В этом заключается программная корректировка обратной связи модального регулятора.

Матрицы модельного объекта формировались случайным образом (по нормальному закону распределения) и проверялись на соответствие критерию полной управляемости по Калману. Эксперименты были проведены для систем до 16-го порядка включительно. Стоит отметить, что на практике размерности исследуемых объектов управления, как правило, не превосходят 10-го порядка.

Дальнейшие исследования будут посвящены исследованию нелинейных систем автоматического управления на основе численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мишин П.А., Мишина П.А. Анализ точности вычисления оптимального регулятора на основе соотношения оптимальности в системе MATLAB и языке Python // E-Scio. 2022. № 11 (74). С. 511-518.
- [2] Афонин В.В. Мурюмин С.М. Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 2. С. 118-120.
- [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
- [4] Тятюшкин А.И. Численные методы оптимизации управления в линейных системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 742-757.
- [5] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7-46.
- [6] Воевода А.А., Вороной В.В. Модальный синтез регуляторов пониженного порядка методом дифференцирования характеристического полинома // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. 2011. № 1. С. 3-12.
- [7] Шумафов М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6, № 4. С. 564-591.
- [8] Симикина А.А., Федосенков Д.Б., Федосенков Б.А. Разработка алгоритма синтеза системы модального управления // Инновации в информационных технологиях, машиностроении и автотранспорте. 2018. С. 137-140.
- [9] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Синтез астатической линейной системой на основе обобщенной формулы Аккермана // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана (Сер. «Приборостроение»). 2017. № 1. С. 67-74.
- [10] Veremey E. Spectral approach to H-optimization of plasma control // International Journal of Modern Physics. 2009. Vol. 24, no. 5. P. 1009-1018.
- [11] Барабанов А.Т. Стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати. Метод резольвенты // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2008. № 3. С. 40-51.
- [12] Срочко В.А., Аксенов Е.В., Антоник В.Г. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2021. Т. 37. С. 3-16.
- [13] Мишин П.А., Немчинова П.А. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта с векторным управлением // E-Scio. 2022. № 4 (67). С. 231-238.
- [14] Афонин В.В. Аналитический контроль решения задачи оптимальной стабилизации стационарного объекта со скалярным управлением // Вестник Мордовского университета. 1998. № 3-4. С. 122-123.
- [15] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, 1994. 193 p.
- [16] Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 6. С. 28-39.
- [17] Афонин В.В., Мишин П.А., Мишина П.А. Вариационный подход к синтезу оптимального регулятора в задаче стабилизации // E-Scio. 2023. № 1 (76). С. 299-315.