Математическая модель радиоканала MIMO с пространственно-временным кодом Аламоути

В. А. Цимбал, В. Е. Тоискин

Филиал Военной академии РВСН имени Петра Великого в городе Серпухове

tsimbalva@mail.ru, vetoiskin@mail.ru

***Аннотация*. Решается задача получения аналитического выражения для определения вероятности битовой ошибки для MIMO радиоканала с реализацией пространственно-временного кодирования по схеме Аламоути. В качестве основных допущений принято наличие в канале только аддитивного белого гауссовского шума, а также наличие на приемной стороне информации о комплексных множителях канала. Решение о приеме двух символов принимается на двойном интервале передачи по критерию максимума правдоподобия.**

Ключевые слова: радиоканал; пространственно-временной код; вероятность ошибки; аналитическое выражение

I. Введение

Качество любого канала связи принято оценивать по совокупности их свойств, определяемых соответствующими показателями. Одним из основных свойств радиоканалов является его помехоустойчивость, оцениваемая вероятностью ошибки на элементарный символ. Аналитические выражения для определения вероятности ошибки в каналах связи зависят от вида модуляции и реализованного на приемной стороне варианта критерия принятия решения о передаваемом символе. Такие выражения известны для ряда простейших случаев [1, 2, 3]. Анализ таких выражений показал, что усложнение видов модуляции и условий передачи сигналов приводит к резкому возрастанию сложности вывода соответствующих аналитических выражений, в связи с чем для большинства случаев получены аналитические выражения в общем виде, решение которых возможно только численными методами. В определенных ситуациях оценка помехоустойчивости варианта реализации канала осуществляется с использованием имитационных моделей.

Значительное усложнение выражений происходит при оценке помехоустойчивости приема сигналов в каналах связи с замираниями [4, 5, 6]. В таких каналах учитывается влияние коэффициентов передачи, являющихся случайными величинами, распределенными по закону Релея, Райса, Накагами и др. [5, 6]. Известно [5, 6], что причиной замирания сигналов в точке приема является многолучевое распространение радиоволн, причем борьба с этим явлением осуществляется за счет формирования совокупности параллельных каналов путем разнесенного приема (каналы SIMO), разнесенной передачи (MISO) или использования многих приемных и многих передающих антенн (MIMO). Для каналов SIMO и MISO (с равной мощностью) аналитические выражения для вероятности ошибки представлены в работе [5]. Для канала MIMO в работе [7] представлен подход к определению вероятности ошибки без учета пространственно-временного кодирования.

Известно [7], что пространственно-временное кодирование увеличивает кратность разноса, что приводит к улучшению характеристик радиоканала с многолучевым распространением радиоволн. В таком случае для выполнения ряда задач является актуальным получение аналитического выражения для вероятности ошибки в приеме символа. С учетом того, что пространственно-временное кодирование может быть реализовано для систем MISO и MIMO, целесообразно получить аналитическое выражение для простейшего случая канала MISO с реализованным кодом Аламоути.

II. Аналитическое выражение для оценки вероятности ошибки в радиоканале MISO

Решение обозначенной задачи осуществляется при следующих исходные положениях.

Рассматривается синхронная система передачи дискретных сообщений такая, что длительность t любого символа z_i одинакова. Не касаясь вопросов помехоустойчивого кодирования и декодирования передаваемых сообщений, в работе рассматривается задача статистического анализа применительно к первой решающей схеме (поэлементный прием).

Пусть на входе приемной антенны действует аддитивный белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ_η^2, при этом параметры шума на интервале времени $0 \le t \le \tau$ и $\tau \le t \le 2\tau$ независимы и равны. Считается, что взаимное расположение передающих антенн таково, что обеспечено полное отсутствие корреляции замираний. Комплексные множители канала μ_1 и μ_2 между передающими и приемной антеннами известны и неизменны на интервале рассмотрения $0 \le t \le 2\tau$.

На вход пространственно-временного кодера (ПВК) поступают два комплексных информационных символа, отображающих точки сигнального созвездия. Значение данных символов зависит от реализованного вида цифровой модуляции. Длительность каждого символа равна τ . В таком случае интервал времени поступления символов на вход ПВК $0 \le t \le 2\tau$.

ПВК реализует известный код Аламоути [7], обладающей скоростью кода равной 1. В результате такого кодирования на выходе ПВК формируется матрица:

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Первая строка матрицы (1) подается на первую ветвь передачи, вторая строка – на вторую, при этом интервал времени передачи символов в каждой ветви равен $0 \le t \le 2\tau$.

Тогда, на приемную антенну в интервале времени $0 \le t \le \tau$ поступает сигнал:

$$y_1 = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \eta_1, \tag{2}$$

а в интервале времени $\tau \le t \le 2\tau$ сигнал:

$$y_2 = \mu_2 \overline{z_1} - \mu_1 \overline{z_2} + \eta_2. \tag{3}$$

В матричной форме выражения (2) и (3) можно записать:

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}; \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Z} + \boldsymbol{\eta}. \end{gathered} \tag{4}$$

Обработка сигналов с кодом Аламоути в пространственно-временном декодере (ПВДК) осуществляется в следующем порядке [7]. Выражение (3) принимается комплексно сопряженным:

$$\overline{y_2} = \overline{\mu_2} z_1 - \overline{\mu_1} z_2 + \overline{\eta_2}, \tag{5}$$

тогда выражение (4) принимает вид:

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} y_1 & \overline{y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_1 & \overline{\mu_2} \\ \mu_2 & -\overline{\mu_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_1 & \overline{\eta_2} \end{vmatrix}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{M} + \boldsymbol{\eta}. \end{gathered} \tag{6}$$

Так как сформированная комплексная матрица канала $\mathbf{M}$ известна, то формируется эрмитово-сопряженная матрица [8]:

$$\mathbf{M}^H = \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} & \mu_2 \\ \overline{\mu_2} & -\mu_1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Умножая обе части выражения (6) на $\mathbf{M}^H$ справа,

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} y_1 & \overline{y_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} & \mu_2 \\ \overline{\mu_2} & -\mu_1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_1 & \overline{\mu_2} \\ \mu_2 & -\overline{\mu_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} & \mu_2 \\ \overline{\mu_2} & -\mu_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_1 & \overline{\eta_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} & \mu_2 \\ \overline{\mu_2} & -\mu_1 \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{8}$$

и раскрывая выражение (8),

$$\begin{gathered} \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} y_1 + \overline{\mu_2}\,\overline{y_2} \\ \mu_2 y_1 - \mu_1 \overline{y_2} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix} \left(\|\mu_1\|^2 + \|\mu_2\|^2 \right) \mathbf{1} + \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} \eta_1 + \overline{\mu_2}\,\overline{\eta_2} \\ \mu_2 \eta_1 - \mu_1 \overline{\eta_2} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix} \det \mathbf{M} \cdot \mathbf{1} + \begin{vmatrix} \overline{\mu_1} \eta_1 + \overline{\mu_2}\,\overline{\eta_2} \\ \mu_2 \eta_1 - \mu_1 \overline{\eta_2} \end{vmatrix}, \end{gathered} \tag{9}$$

получаем выражение (9) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \overline{\mu_1} y_1 + \overline{\mu_2}\,\overline{y_2} = \det \mathbf{M} \cdot z_1 + \overline{\mu_1} \eta_1 + \overline{\mu_2}\,\overline{\eta_2} \\ \mu_2 y_1 - \mu_1 \overline{y_2} = \det \mathbf{M} \cdot z_2 + \mu_2 \eta_1 - \mu_1 \overline{\eta_2} \end{cases}. \tag{10}$$

Таким образом, из выражения для первого тактового интервала исключен неизвестный на приемной стороне символ z_2, а для второго – символ z_1. Тогда в результате линейного преобразования поступивших на вход ПВДК интервале времени $0 \le t \le 2\tau$ смеси сигналов и помех на интервале времени $0 \le t \le \tau$ имеем выражение для первого переданного символа:

$$z_1 = \frac{\overline{\mu_1} \eta_1 + \overline{\mu_2}\,\overline{\eta_2} - \overline{\mu_1} y_1 - \overline{\mu_2}\,\overline{y_2}}{\det \mathbf{M}}, \tag{11}$$

а на интервале $\tau \le t \le 2\tau$ – выражение для второго переданного символа:

$$z_2 = \frac{\mu_2 \eta_1 - \mu_1 \overline{\eta_2} - \mu_2 y_1 + \mu_1 \overline{y_2}}{\det \mathbf{M}}. \tag{12}$$

Из рассмотренного алгоритма приема [7] следует, что для получения аналитического выражения для вероятности ошибки необходимо рассматривать временной интервал $0 \le t \le 2\tau$ и учитывать проведенные преобразования с учетом известной матрицы канала.

В таком случае выразим из выражения (6) вектор шума $\boldsymbol{\eta}$ с учетом преобразований в пространственно-временном декодере:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{M}. \tag{13}$$

Как было указано выше, решение о приеме символов принимается на интервале $0 \le t \le 2\tau$, где τ – длительность одного такта передачи, тогда рассматриваемая смесь полезного сигнала и помехи на указанном интервале есть сумма $y_1 + y_2$. В таком случае выражение (13) будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \eta_1 + \overline{\eta_2} = \left(y_1 + \overline{y_2} \right) - \left(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \overline{\mu_2} z_1 - \overline{\mu_1} z_2 \right); \\ \eta_1 + \overline{\eta_2} = \left(y_1 + y_2 \right) - \left(z_1 \left(\mu_1 + \overline{\mu_2} \right) + z_2 \left(\mu_2 - \overline{\mu_1} \right) \right); \\ \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\xi} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\xi}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ – вектор-столбец, все элементы которого равны 1.

В условиях принятых допущений в канале связи присутствует АБГШ, функция плотности вероятности которого определяется так [9]:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 \right). \tag{15}$$

Так как шумовые составляющие на первом и втором тактовых интервалах независимы и равны, то дисперсия шума на интервале $0 \le t \le 2\tau$ равна:

$$\sigma^2_{\eta_1 + \eta_2} = \sigma^2_{\eta_1} + \sigma^2_{\eta_2} = 2\sigma^2_{\boldsymbol{\eta}}. \tag{16}$$

Тогда с учетом (15) и (16) условную плотность вероятностей вектора $\mathbf{y} = \begin{vmatrix} y_1 & \overline{y_2} \end{vmatrix}$ при условии, что передавался вектор $\mathbf{z} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \end{vmatrix}$ можно записать следующим образом:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}} \right)^2 \right), \tag{17}$$

где $a=\left(y_1+\overline{y_2}\right)-\left(z_1\left(\mu_1-\overline{\mu_2}\right)+z_2\left(\mu_2+\overline{\mu_1}\right)\right)$, или в матричной форме:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{z})=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{y}\cdot\xi-\mathbf{z}\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}\right)^2\right). \quad (18)$$

С использованием (17) и с учетом априорной вероятности появления вектора передаваемых символов $p(\mathbf{z})$ можно определить вероятность ошибки в его приеме следующим образом [1,9]:

$$p_{\text{ош}}=1-\sum_{i=1}^{k}p(\mathbf{z}_i)\,p(\mathbf{y}|\mathbf{z}_i), \quad (19)$$

где k – число возможных векторов.

В таком случае, рассмотрим два вектора $\mathbf{z}_r$ и $\mathbf{z}_d$, таких что априорные вероятности $p(\mathbf{z}_r)=p(\mathbf{z}_d)$. Пусть гипотеза H_1 заключается в том, что принят вектор $\mathbf{z}_r$, а H_2 - гипотеза, заключающаяся в том, что принят вектор $\mathbf{z}_d$. Тогда из критерия максимума правдоподобия [1, 9] следует:

$$\frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{z}_r)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{z}_d)}\underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}}1. \quad (20)$$

Раскрывая (20) и проводя вычисления, получаем:

$$\exp\left(\frac{\mathbf{y}\cdot\xi\cdot(\mathbf{z}_r-\mathbf{z}_d)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{2\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}-\frac{\left(\mathbf{z}_r^2-\mathbf{z}_d^2\right)(\mathbf{M}\cdot\xi)^2}{4\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}\right)\underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}}1. \quad (21)$$

Логарифмируя обе части (21), несложно получить:

$$\mathbf{y}\cdot\xi\underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{(\mathbf{z}_r+\mathbf{z}_d)\mathbf{M}\cdot\xi}{2}. \quad (22)$$

Тогда порог принятия решения есть:

$$\gamma_0=\frac{(\mathbf{z}_r+\mathbf{z}_d)\mathbf{M}\cdot\xi}{2}. \quad (23)$$

Из (19) следует, что вероятность ошибки в приеме вектора $\mathbf{z}$ находится путем суммирования всех возможностей появления ошибки. Для случая симметричных функций плотности вероятности и при равновероятных векторах $\mathbf{z}$ вероятность ошибки есть условная вероятность приема вектора $\mathbf{z}_d$ при передаче $\mathbf{z}_r$ и может быть вычислена через вероятность правильного приема вектора $\mathbf{z}_r$, которая определяется как:

$$p_{\mathbf{z}}=\int_{-\infty}^{\gamma_0=\frac{(\mathbf{z}_r+\mathbf{z}_d)\mathbf{M}\cdot\xi}{2}}p(\mathbf{y}|\mathbf{z})\,d(\mathbf{y}\cdot\xi)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\gamma_0=\frac{(\mathbf{z}_r+\mathbf{z}_d)\mathbf{M}\cdot\xi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{y}\cdot\xi-\mathbf{z}_r\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}\right)^2\right)d(\mathbf{y}\cdot\xi).$$

Произведем замену переменной:

$$\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}dx=d(\mathbf{y}\cdot\xi),$$

$$\gamma=\frac{(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{2\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}.$$

Получим:

$$p_{\mathbf{z}}=\int_{-\infty}^{\gamma=\frac{(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{2\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx= \quad (24)$$

$$=F\left(\frac{(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{2\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}\right),$$

где $F(\gamma)$ - функция Лапласа.

Для минимизации $p_{\text{ош}}$ в общем случае необходимо чтобы аргумент функции $F(\gamma)$ был максимальным. Следовательно, необходимо определить максимальное значение:

$$\arg\max\left(\frac{(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi}{2\sqrt{2}\sigma_{\boldsymbol{\eta}}}\right)$$

или, что то же самое:

$$\arg\max\left(\frac{\left((\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi\right)^2}{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}\right), \quad (25)$$

где $\left((\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi\right)$ – разность желательных компонентов векторов на входе линейного фильтра в момент времени $t=2\tau$, причем квадрат этого разностного сигнала его мгновенная мощность.

Известно [2], что согласованный фильтр для приема отдельно принятого символа дает на выходе максимально возможное отношение сигнал/шум, равное $2E/N_0$. В рассматриваемом случае приема вектора из двух символов на интервале времени 2τ шумовая составляющая, как было отмечено выше, есть $2\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2$. Тогда согласованный фильтр для приема вектора из двух символов дает на выходе максимально возможное отношение сигнал/шум, равное $2E/2N_0=E/N_0$. Допустим, что фильтр согласовывает два вектора, различие между которыми с учетом известной комплексной матрицы канала и предварительной обработки в ПВДК имеет вид $\left((\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi\right)$. Следовательно, из выражения (25) можно записать:

$$\frac{\left((\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)\cdot\mathbf{M}\cdot\xi\right)^2}{\sigma_{\boldsymbol{\eta}}^2}=\frac{E_d}{N_0}, \quad (26)$$

где $N_0/2$ - двусторонняя спектральная плотность мощности шума на входе фильтра, а

$$E_d=\int_0^{2\tau}(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)^2\cdot(\mathbf{M}\cdot\xi)^2\,dt. \quad (27)$$

Полагая, что передаваемые комплексные информационные символы $z_{d1},z_{d2},z_{r1},z_{r2}$ равной энергии и раскрывая квадрат разности векторов $(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r)^2$ в выражении (27), получим:

$$\left(\mathbf{z}_d-\mathbf{z}_r\right)^2=z_{d1}^2-2z_{d1}z_{r1}+z_{r1}^2+z_{d2}^2-2z_{d2}z_{r2}+z_{r2}^2$$

Так как энергия символа есть:

$$E_c=\int_0^{\tau} {z_{r1}}^2dt=\int_{\tau}^{2\tau} {z_{r2}}^2dt=\int_0^{\tau} {z_{d1}}^2dt=\int_{\tau}^{2\tau} {z_{d2}}^2dt$$

и вводя в рассмотрение коэффициент корреляции двух символов

$$\rho_c=\frac{1}{E_c}\int_0^{\tau} z_{r1}z_{d1}dt=\frac{1}{E_c}\int_{\tau}^{2\tau} z_{r1}z_{d1}dt\ ,$$

получим:

$$E_d=4E_c\left(1-\rho_c\right)\left(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^2. \qquad (28)$$

В выражении (28) $\left(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^2=\left(\mu_1-\overline{\mu_2}\right)^2+\left(\mu_2+\overline{\mu_1}\right)^2$.

Объединяя (24) и (28), получим:

$$p_{\mathbf{z}}=F\left(\sqrt{\frac{4E_c\left(1-\rho_c\right)\left(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^2}{N_0}}\right). \qquad (29)$$

Тогда, переходя от функции Лапласа к функции Крампа [9], а также учитывая, что в рассмотренном случае вектор состоит из двух символов, выражение для вероятности ошибки в приеме символа примет вид:

$$p_{\text{ош}}=\frac{1}{2}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{4E_c\left(1-\rho_c\right)\left(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^2}{N_0}}\right)\right). \qquad (30)$$

Выражение (30) в граничных условиях сводится к известному выражению для вероятности ошибки при разнесенном приеме (разнесенной передаче при равной мощности на каждой передающей антенне) [5], что подтверждает его достоверность.

III. Аналитическое выражение для оценки вероятности ошибки в радиоканале MIMO

В случае MIMO радиоканала при тех же ограничениях и допущениях, что и для рассмотренного случая MISO радиоканала, основным отличием является наличие двух приемных антенн. Тогда, на первую приемную антенну A_{R1} в интервале времени $0\le t\le\tau$ поступает сигнал

$$y_{11}=\mu_{11}z_1+\mu_{21}z_2+\eta_{11}, \qquad (31)$$

а на вторую приемную антенну A_{R2}:

$$y_{21}=\mu_{12}z_1+\mu_{22}z_2+\eta_{21}. \qquad (32)$$

В интервале времени $\tau\le t\le 2\tau$ на приемную антенну A_{R1} поступает сигнал

$$y_{12}=-\mu_{11}\overline{z_2}+\mu_{21}\overline{z_1}+\eta_{12}, \qquad (33)$$

а на приемную антенну A_{R2}:

$$y_{22}=-\mu_{12}\overline{z_2}+\mu_{22}\overline{z_1}+\eta_{22}. \qquad (34)$$

Известно [5], что на приемной стороне радиоканала при реализации разнесенного приема возможны различные варианты объединения ветвей приема – сложение с равными весами, сложение с оптимальным распределением весовых коэффициентов и т. д. Допустим, что реализована схема с равным сложением синхронно поступающих сигналов по двум ветвям приема. Тогда уравнения для первого интервала времени $0\le t\le\tau$ можно объединить так:

$$\begin{aligned}&y_1=y_{11}+y_{12}=\\&=\mu_{11}z_1+\mu_{21}z_2+\mu_{12}z_1+\mu_{22}z_2+\eta_{11}+\eta_{12}\end{aligned}, \qquad (35)$$

а в интервале времени $\tau\le t\le 2\tau$:

$$\begin{aligned}&y_2=y_{12}+y_{22}=\\&=-\mu_{11}\overline{z_2}+\mu_{21}\overline{z_1}-\mu_{12}\overline{z_2}+\mu_{22}\overline{z_1}+\eta_{12}+\eta_{22}\end{aligned}. \qquad (36)$$

Аналогично случаю рассмотрения канала MISO, выражение (36) принимается комплексно сопряженным:

$$\overline{y_2}=-\overline{\mu_{11}}z_2+\overline{\mu_{21}}z_1-\overline{\mu_{12}}z_2+\overline{\mu_{22}}z_1+\overline{\eta_{12}}+\overline{\eta_{22}}\ . \qquad (37)$$

Предполагая, что шум на входе каждой антенны независим, выражения (35) и (37) можно записать так:

$$y_1=z_1\left(\mu_{11}+\mu_{12}\right)+z_2\left(\mu_{21}+\mu_{22}\right)+2\eta_1, \qquad (38)$$

$$\overline{y_2}=z_1\left(\overline{\mu_{21}}+\overline{\mu_{22}}\right)-z_2\left(\overline{\mu_{11}}+\overline{\mu_{12}}\right)+2\overline{\eta_2}, \qquad (39)$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}y_1 & \overline{y_2}\end{vmatrix}=\\&=\begin{vmatrix}z_1 & z_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\left(\mu_{11}+\mu_{12}\right) & \left(\overline{\mu_{21}}+\overline{\mu_{22}}\right)\\ \left(\mu_{21}+\mu_{22}\right) & -\left(\overline{\mu_{11}}+\overline{\mu_{12}}\right)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\eta_1 & 2\overline{\eta_2}\end{vmatrix}.\end{aligned} \qquad (40)$$

Вводя обозначения $\mu_1=\left(\mu_{11}+\mu_{12}\right)$, $\mu_2=\left(\mu_{21}+\mu_{22}\right)$, $\overline{\mu_1}=\left(\overline{\mu_{11}}+\overline{\mu_{12}}\right)$, $\overline{\mu_2}=\left(\overline{\mu_{21}}+\overline{\mu_{22}}\right)$, перепишем выражение (40):

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}y_1 & \overline{y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z_1 & z_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mu_1 & \overline{\mu_2}\\ \mu_2 & -\overline{\mu_1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\eta_1 & 2\overline{\eta_2}\end{vmatrix};\\&\mathbf{y}=\mathbf{z}\cdot\mathbf{M}+2\boldsymbol{\eta}.\end{aligned} \qquad (41)$$

Тогда проводя рассуждения, аналогичные случаю MISO радиоканалу, выражение для вероятности ошибки в приеме символа будет выглядеть так:

$$p_{\text{ош}}=\frac{1}{2}\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2E_c\left(1-\rho_c\right)\left(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^2}{N_0}}\right)\right), \qquad (42)$$

где:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^2=\left(\left(\mu_{11}+\mu_{12}\right)-\left(\overline{\mu_{21}}+\overline{\mu_{22}}\right)\right)^2+\\&+\left(\left(\mu_{21}+\mu_{22}\right)+\left(\overline{\mu_{11}}+\overline{\mu_{12}}\right)\right)^2.\end{aligned}$$

IV. Заключение

Таким образом, получены аналитические выражения для случая MISO радиоканала (30) и MIMO радиоканала (42) позволяющие определять вероятность битовой ошибки при наличии в канале аддитивного белого гауссовского шума, а также известных и неизменных на периоде передачи двух символов комплексных множителях канала. Однако в реальных условиях комплексные множители канала изменяются случайным образом в течение времени. Для усреднения по всем возможным значениям множителей канала вероятности битовой ошибки необходимо знать, по какому закону они распределены. Следовательно, направлением дальнейших исследований следует считать определение закона распределения результирующего множителя канала $(\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\xi})^2$. Такой закон распределения будет завесить от числа приемных и передающих антенн.

Список литературы

[1] Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Сов. радио, 1970. 728 с.

[2] Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение, 2-е изд. : пер. с англ. М.: ООО «ИД Вильямс», 2016. 1104 с.

[3] Прокис Дж. Цифровая связь / Пер. с англ. Под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь. 2000. 800 с.

[4] Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн: учебник для вузов связи. М.: Радио и связь, 1984. 272 с., ил.

[5] Андронов И.С., Финк Л.М. Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. М.: Советское радио, 1971. 408 с.

[6] Сикарев А.А., Фалько А.И. Оптимальный прием дискретных сообщений. М.: Связь, 1978. 328 с.

[7] Шлома А.М., Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шумов А.П. Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи. М.: Горячая линия – Телеком, 2008. 344 с.

[8] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Изд-во «Наука», 1988. 549 с.

[9] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника.2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.