

Математическое моделирование схем управления на мажоритарной логике

Т. Г. Черноусова

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)

anakiz1000@gmail.com

Аннотация. QCA-нанотехнология (Quantum – dot Cellular Automata nanotechnology (QCA-nanotechnology)), как альтернатива традиционной КМОП-технологии, позволяет иначе посмотреть на логическое проектирование цифровых схем управления, разработанных исключительно на мажоритарных и инверсных элементах. В статье предлагается классифицировать мажоритарные функции с тремя переменными на простые и сложные. Исходя из этой классификации, рассматриваются наиболее существенные законы и тождества мажоритарной логики, в соответствии с которыми следует проводить математическое моделирование цифровых схем управления, в то время как их реализацию необходимо осуществлять по стандартам QCA-нанотехнологии. Представлена математическая модель мажоритарного декодера DEC 3-8. Данную модель можно считать базовой в логическом проектировании других видов декодеров на элементах мажоритарной логики либо нетривиальных схем управления, содержащих декодер.

Ключевые слова: мажоритарная логика; математическое моделирование; математическая модель мажоритарного декодера; логическое проектирование; QCA-нанотехнология

I. ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления приложениями искусственного интеллекта тесно связаны с новыми исследованиями в направлении не только математического обеспечения, но и аппаратного [1–5]. В настоящее время проявляется большой интерес к ряду постКМОП-технологий, с помощью которых имеется возможность увеличить плотность компоновки кристалла, снизить его энергопотребление, а также повысить скорость вычислений. Одной из таких многообещающих инноваций является QCA-нанотехнология [6–12]. Цифровые логические схемы, реализуемые по стандартам QCA-нанотехнологии, в качестве базовых – имеют мажоритарные и инверсные элементы. Назовем эти элементы QCA вентилями, а схемы, построенные на них – мажоритарными. Во втором разделе статьи показана QCA ячейка, на основании которой строятся QCA вентили [6–8, 12]. В этом разделе представлены два вида конструкций QCA инверторов, а также конструкция QCA мажоритарного элемента, имеющего три входа и один выход [6–8].

Создание мажоритарных логических схем по стандартам QCA-нанотехнологии можно разбить на два стадии. На первой стадии выполняется логическое

проектирование, согласно которому производится полный цикл работ по разработке мажоритарной логической схемы [14–18]. На второй стадии осуществляется уже непосредственная реализация разработанной схемы по QCA-нанотехнологии [16, 19–21]. Отметим, что первая стадия неразрывно связана с вопросами исследования свойств мажоритарных функций, а также математического моделирования мажоритарных логических схем. В третьем разделе статьи предлагается классифицировать мажоритарные функции с тремя переменными на простые и сложные. В соответствии с данной классификацией рассматриваются основные законы и тождества, по которым строятся математические модели мажоритарных логических схем, предназначенные для выполнения вычислительных и управляющих операций [22–31]. В четвертом разделе показана математическая модель мажоритарного декодера DEC 3–8. Данная модель может использоваться в математическом моделировании других видов декодеров либо нетривиальных схем управления. В заключении отмечается актуальность проведения исследовательских работ, связанных с логическим проектированием мажоритарных схем.

II. РЕАЛИЗАЦИЯ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАЖОРИТАРНОЙ ЛОГИКИ ПО QCA-НАНОТЕХНОЛОГИИ

A. QCA ячейка

В своих ключевых работах [6–8] C.S. Lent и др. показали QCA ячейку. Современная QCA ячейка имеет четыре квантовые точки, которые геометрически располагаются так, что образуют квадрат. В случае, если ячейка имеет два электрона, то, благодаря взаимному электростатическому отталкиванию, данные электроны устремляются как можно дальше друг от друга. В то же время туннелирование электронов к квантовым точкам ячейки позволяет им занять эти квантовые точки. Состояние, которое принимает QCA ячейка, называется ее поляризацией P . QCA ячейка имеет два значения поляризации: $P=-1$, соответствующее двоичному логическому «0», а также $P=+1$, соответствующее двоичной логической «1». На рис. 1 проиллюстрированы возможные состояния QCA ячейки.

При последовательном соединении таких ячеек можно получить двоичную QCA линию (QCA wire), передающую логическую «1» либо логический «0» [10, 13]. На рис. 2 показана передача логической «1» по QCA линии, состоящей из шести ячеек. Вход этой QCA линии обозначается через In, а выход – через Out.

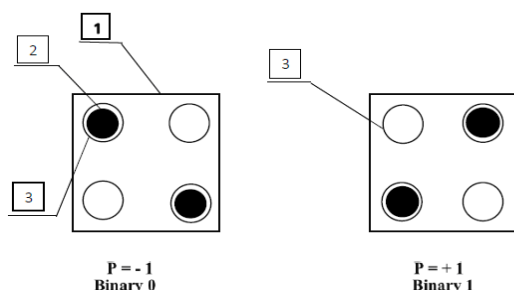


Рис. 1. Поляризация ячейки QCA: 1- QCA ячейка; 2 – электрон; 3 – квантовая точка

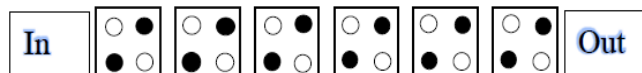


Рис. 2. Передача логической «1» по QCA линии, состоящей из шести ячеек

В. QCA инверторы

Рассмотрим два вида конструкций QCA инверторов [8, 10, 13, 15, 20]. На рис.3 продемонстрирована стандартная реализация QCA инвертора, на вход In которого поступает логический «0», а выход Out передает логическую «1» исходя из таблицы истинности функционирования инвертора. По своей конструкции рассматриваемый QCA инвертор является двухветвевым (dual – branch inverter), таким образом обеспечивая надежное инвертирование информации.

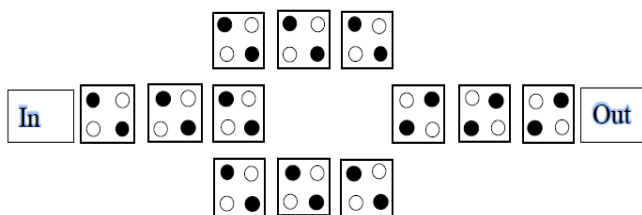


Рис. 3. Стандартный двухветвевой QCA инвертор

На рис.4 показан альтернативный вариант реализации QCA инвертора, на вход In которого также поступает логический «0», а выход Out передает логическую «1». По своей конструкции второй вариант реализации QCA инвертора является одноветвевым (single-branch inverter), что безусловно снижает надежность инвертора, но делает его более компактным. Такое одноветвевое исполнение инвертора применяется тогда, когда при использовании QCA-нанотехнологии разрабатываемая логическая схема менее чувствительна к шумам.

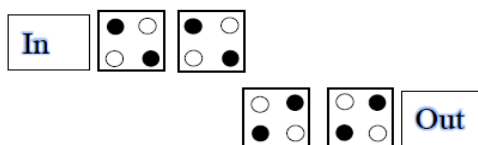


Рис. 4. Одноветвевой QCA инвертор

С. QCA мажоритарный элемент

Математически мажоритарная функция $M(x, y, z)$ определяется по выражению [9–13, 15–31]:

$$MAJ = M(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz. \quad (1)$$

Логическая схема *Maj*, реализующая функцию (1) в булевой алгебре логики, представлена на рис. 5. Она состоит из трех элементов И, объединенных по ИЛИ.

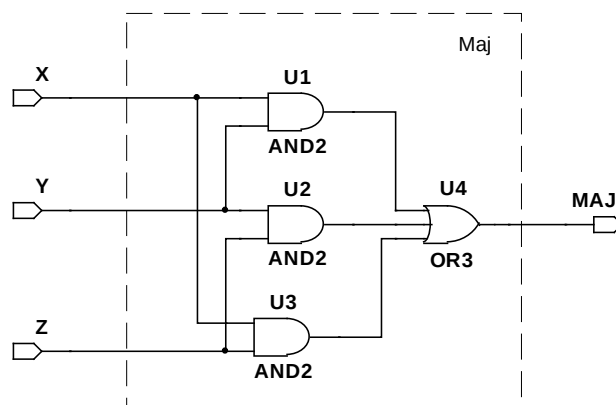


Рис. 5. Логическая схема *Maj*, реализующая мажоритарную функцию (1)

Конструкция QCA мажоритарного элемента с тремя входами и одним выходом показана на рис.6 [8, 13, 15, 20]. Как видно, на входы *X* и *Y* рассматриваемого элемента подается логическая «1», а на вход *Z* – логический «0». В таком случае выход *MAJ* передает логическую «1», что соответствует функционированию логической схемы *Maj*, построенной, как упоминалось выше, по мажоритарной функции (1). Кроме трех входных и одной выходной ячеек, конструкция QCA мажоритарного элемента содержит вдобавок оценочную ячейку (evaluation cell), которая поляризуется так, как и любые две входные ячейки. В рассматриваемом случае оценочная ячейка имеет поляризацию $P=+1$.

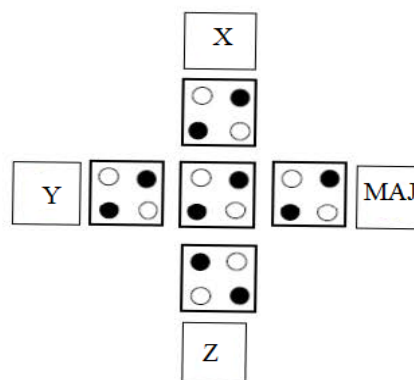


Рис. 6. QCA мажоритарный элемент

Условно-графическое обозначение (УГО) мажоритарного элемента в цифровых логических схемах представлено на рис. 7.

Итак, продемонстрированные в разделе конструкции вентилях делают возможным реализацию цифровых схмотехнических решений по перспективной QCA-нанотехнологии. Это значит, что становятся значимыми вопросы исследования мажоритарных функций, а также математического моделирования мажоритарных логических схем, предназначенных для выполнения вычислительных и управляющих операций.

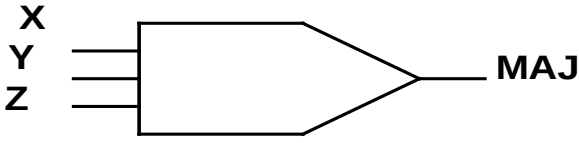


Рис. 7. УГО мажоритарного элемента, функционирование которого соответствует логической схеме *Maj*, построенной по (1)

III. ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ МАЖОРИТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Первыми сформулировали основные свойства мажоритарной функции с тремя переменными Cohn M. и Lindaman R. в работах [22, 23]. Рассмотрим их более подробно.

А. Простые мажоритарные функции

Мажоритарная функция (1) представлена в минимальной дизъюнктивной нормальной форме (МДНФ). Поэтому будем называть ее простой. Простая мажоритарная функция обладает свойством коммутативности:

$$M(x, y, z) = M(x, z, y) = M(y, x, z) = M(y, z, x) = \\ = M(z, x, y) = M(z, y, x).$$

Ее инверсное значение находится по закону распространения инверсии (Inverter Propagation) [22–27]:

$$\overline{M(x, y, z)} = M(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z. \quad (2)$$

Для простой мажоритарной функции действует закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{M(x, y, z)}} = M(x, y, z). \quad (3)$$

Если одна из переменных простой мажоритарной функции равна константе 1 или 0, то эта функция преобразуется соответственно в дизъюнкцию либо конъюнкцию. Согласно сказанному, приведем примеры дизъюнкций и конъюнкций, полученных исходя из (1) и (2):

$$M(x, y, 1) = x \vee y; \quad \overline{M(x, y, 1)} = \overline{x} \vee \overline{y}; \quad (4)$$

$$M(x, y, 0) = xy; \quad \overline{M(x, y, 0)} = \overline{xy}. \quad (5)$$

Ниже покажем ответы для случая, когда в (4) и (5) переменную y заменим на x :

$$M(x, x, 1) = x; \quad \overline{M(x, x, 1)} = \overline{x}; \quad (6)$$

$$M(x, x, 0) = x; \quad \overline{M(x, x, 0)} = \overline{x}. \quad (7)$$

Аналогично (6), (7) выполняются простые мажоритарные функции (8), (9):

$$M(x, x, y) = M(x, x, \overline{y}) = M(x, x, x) = x; \quad (8)$$

$$\overline{M(x, x, y)} = \overline{M(x, x, \overline{y})} = \overline{M(x, x, x)} = \overline{x}. \quad (9)$$

Исходя из (8) и (9), а также правил алгебры логики можно найти следующие простые мажоритарные функции:

$$M(x, \overline{x}, y) = y; \quad \overline{M(x, \overline{x}, y)} = \overline{y}; \quad (10)$$

$$M(x, \overline{x}, \overline{y}) = \overline{y}; \quad \overline{M(x, \overline{x}, \overline{y})} = y. \quad (11)$$

Рассмотренные законы распространения инверсии (2), двойного отрицания (3), а также свойства коммутативности и (4)–(11) позволяют производить упрощения тождеств мажоритарной логики.

В. Сложные мажоритарные функции

Если аргументами простой мажоритарной функции являются другие мажоритарные функции, то такую функцию будем называть сложной.

Для сложной мажоритарной функции выполняется два аксиоматических закона. Первый из них является законом ассоциативности [22–27]:

$$M(x, u, M(y, u, z)) = M(y, u, M(x, u, z)) = \\ = M(z, u, M(x, u, y)). \quad (12)$$

Второй – это закон дистрибутивности [22–27]:

$$M(x, y, M(u, v, z)) = \\ = M(M(x, y, u), M(x, y, v), z). \quad (13)$$

Докажем тождество:

$$M(x, y, M(x, y, z)) = M(x, y, z). \quad (14)$$

Доказательство основывается на (8), (13) и свойстве коммутативности простой мажоритарной функции:

$$M(x, y, M(x, y, z)) = M(M(x, y, x), M(x, y, y), z) = \\ = M(x, y, z).$$

Подобным образом доказываются тождества:

$$M(x, y, M(\overline{x}, \overline{y}, z)) = M(x, y, z); \quad (15)$$

$$M(x, y, M(x, y, \overline{z})) = M(x, y, \overline{M(x, y, z)}) = \\ = M(x, y, \overline{z}). \quad (16)$$

На основании (2), (12), (15), (16) находится тождество:

$$M(\overline{x}, \overline{y}, \overline{M(x, y, z)}) = \overline{M(x, y, M(x, y, z))} = \\ = \overline{M(x, y, z)}. \quad (17)$$

Принимая во внимание (10)–(13), можно записать:

$$M(x, M(x, y, z), \overline{z}) = M(x, M(x, y, \overline{z}), z) = \\ = M(x, \overline{z}, z) = x. \quad (18)$$

Аналогично (18) выполняются тождества:

$$M(x, y, M(\overline{x}, \overline{y}, z)) = M(\overline{x}, \overline{y}, M(x, y, z)) = y; \quad (19)$$

$$M(M(x, \overline{y}, z), y, z) = M(M(x, y, z), \overline{y}, z) = z. \quad (20)$$

Докажем тождество:

$$M(u, \overline{u}, M(x, y, z)) = M(x, y, z). \quad (21)$$

Для доказательства тождества (21) воспользуемся (10), (11), а также законом дистрибутивности (13):

$$M(u, \overline{u}, M(x, y, z)) = \\ = M(M(u, \overline{u}, x), M(u, \overline{u}, y), z) = M(x, y, z).$$

Подкрепим доказательством выполнение тождества:

$$M(x, u, M(y, \bar{u}, z)) = M(x, u, M(x, y, z)). \quad (22)$$

Доказательство (22) основано на применении (10)–(13):

$$\begin{aligned} M(x, u, M(\bar{u}, y, z)) &= M(M(x, u, \bar{u}), M(x, u, y), z) = \\ &= M(x, M(x, u, y), z) = M(x, u, M(x, y, z)). \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд сложных мажоритарных функций, аргументами которых являются две простые. Покажем, что

$$M(x, M(x, y, z), M(x, y, \bar{z})) = x. \quad (23)$$

Доказательство основывается на (8), (12), (13), (18):

$$\begin{aligned} M(x, M(x, y, z), M(x, y, \bar{z})) &= \\ &= M(x, M(M(x, z, M(x, y, z)), M(x, y, \bar{z}))) = \\ &= M(M(x, x, z), M(x, z, M(x, y, \bar{z})), M(x, y, z)) = \\ &= M(x, x, M(x, y, z)) = x. \end{aligned}$$

Рассмотрим доказательство тождества:

$$M(x, M(x, y, z), \bar{M}(x, y, z)) = x. \quad (24)$$

Доказательство (24) базируется на (2), (8), (9), (12), (13), (16), (23):

$$\begin{aligned} M(x, M(x, y, z), \bar{M}(x, y, z)) &= \\ &= M(x, M(x, y, z), M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = \\ &= M(x, M(x, y, M(x, y, z)), M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) = \\ &= M(M(x, y, x), M(x, y, M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})), M(x, y, z)) = \\ &= M(x, M(x, y, \bar{z}), M(x, y, z)) = x. \end{aligned}$$

Учитывая (13), запишем:

$$\begin{aligned} M(M(x, y, u), M(x, y, v), z) &= \\ &= M(x, y, M(u, v, z)); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}(M(x, y, u), M(x, y, v), z) &= \\ &= \bar{M}(x, y, M(u, v, z)). \end{aligned} \quad (26)$$

Продemonстрируем выполнение тождества:

$$M(x, M(u, y, z), M(\bar{u}, y, z)) = M(x, y, z). \quad (27)$$

Для этого воспользуемся (10), (12), (13), (14)–(16), (18):

$$\begin{aligned} M(x, M(u, y, z), M(\bar{u}, y, z)) &= \\ &= M(x, M(y, z, M(u, y, z)), M(\bar{u}, y, z)) = \\ &= M(M(x, y, z), M(y, z, M(\bar{u}, y, z)), M(u, y, z)) = \\ &= M(M(x, y, z), M(\bar{u}, y, z), M(u, y, z)) = \\ &= M(y, z, M(x, \bar{u}, u)) = M(x, y, z). \end{aligned}$$

Следствиями (27) являются следующие тождества:

$$M(u, M(u, y, z), M(\bar{u}, y, z)) = M(u, y, z); \quad (28)$$

$$M(\bar{x}, M(u, \bar{y}, \bar{z}), \bar{M}(u, y, z)) = \bar{M}(x, y, z); \quad (29)$$

$$M(\bar{u}, M(u, \bar{y}, \bar{z}), \bar{M}(u, y, z)) = \bar{M}(u, y, z). \quad (30)$$

Докажем тождество:

$$M(u, M(u, x, y), M(\bar{u}, x, z)) = M(u, x, y). \quad (31)$$

В доказательстве используем (13), (14), (15), (21):

$$\begin{aligned} M(u, M(u, x, y), M(\bar{u}, x, z)) &= \\ &= M(u, M(u, x, M(u, x, y)), M(\bar{u}, x, z)) = \\ &= M(M(u, x, u), M(u, x, M(\bar{u}, x, z)), M(u, x, y)) = \\ &= M(u, M(z, x, (\bar{u}, x, u)), M(u, x, y)) = \\ &= M(u, x, M(u, x, y)) = M(u, x, y). \end{aligned}$$

Рассмотрим нахождение тождества:

$$\begin{aligned} M(x, M(\bar{x}, y, z), M(\bar{x}, y, \bar{z})) &= \\ &= M(M(\bar{x}, y, z), y, M(x, y, \bar{z})). \end{aligned} \quad (32)$$

Определение (32) основано на (12)–(15), (18)–(20):

$$\begin{aligned} M(x, M(\bar{x}, y, z), M(\bar{x}, y, \bar{z})) &= \\ &= M(x, M(\bar{x}, y, z), M(\bar{x}, y, M(\bar{x}, y, \bar{z}))) = \\ &= M(M(x, \bar{x}, y), M(\bar{x}, y, M(\bar{x}, y, z)), M(\bar{x}, y, \bar{z})) = \\ &= M(y, M(\bar{x}, y, z), M(\bar{x}, y, \bar{z})) = \\ &= M(M(y, z, M(\bar{x}, y, \bar{z})), M(\bar{x}, y, z), M(\bar{x}, y, \bar{z})) = \\ &= M(M(y, z, M(\bar{x}, y, z)), M(y, z, M(\bar{x}, y, \bar{z})), M(x, y, \bar{z})) = \\ &= M(M(\bar{x}, y, z), y, M(x, y, \bar{z})). \end{aligned}$$

Покажем выполнение тождества:

$$\begin{aligned} M(M(x, u, z), y, M(\bar{x}, \bar{u}, z)) &= \\ &= M(z, M(\bar{x}, u, y), M(x, \bar{u}, y)). \end{aligned} \quad (33)$$

Для этого применим (2), (8), (12), (13), (21), (24), (27) [28–31]:

$$\begin{aligned} M(M(x, u, z), y, M(\bar{x}, \bar{u}, z)) &= \\ &= M(M(\bar{x}, y, M(x, u, z)), M(\bar{u}, y, M(x, u, z)), z) = \\ &= M(M(\bar{x}, y, M(u, y, z)), M(\bar{u}, y, M(x, y, z)), z) = \\ &= M(M(z, y, M(\bar{x}, u, y)), M(z, y, M(x, \bar{u}, y)), z) = \\ &= M(z, y, M(M(\bar{x}, u, y), M(x, \bar{u}, y), z)) = \\ &= M(z, M(\bar{x}, u, y), M(M(x, \bar{u}, y), y, z)) = \\ &= M(z, M(\bar{x}, u, y), M(M(x, \bar{u}, y), y, \bar{M}(\bar{x}, u, y))) = \\ &= M(z, M(\bar{x}, u, y), M(M(x, \bar{u}, y), y, M(x, \bar{u}, \bar{y}))) = \\ &= M(z, M(\bar{x}, u, y), M(M(x, y, M(x, \bar{u}, y)), \\ &M(\bar{u}, y, M(x, \bar{u}, y)), M(\bar{y}, y, M(x, \bar{u}, y)))) = \\ &= M(z, M(\bar{x}, u, y), M(x, \bar{u}, y)). \end{aligned}$$

IV. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЖОРИТАРНОГО ДЕКОДЕРА DEC 3–8

Известно, что декодеры зачастую применяют в цифровых схемах формирования управляющих сигналов. Покажем одну из возможных математических моделей мажоритарного декодера DEC 3-8, входами которого являются A, B и C , а выходами – $Y_0 - Y_7$:

$$Y_0 = M(\bar{A}, 0, \bar{M}(\bar{A}, B, C)) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}; \quad (34)$$

$$Y_1 = M(0, \bar{M}(A, B, C), C) = \bar{A}\bar{B}C; \quad (35)$$

$$Y_2 = M(\bar{M}(A, B, C), B, 0) = \bar{A}B\bar{C}; \quad (36)$$

$$Y_3 = M(\bar{A}, 0, M(A, B, C)) = \bar{A}BC; \quad (37)$$

$$Y_4 = M(A, 0, \bar{M}(A, B, C)) = A\bar{B}\bar{C}; \quad (38)$$

$$Y_5 = M(M(A, B, C), \bar{B}, 0) = A\bar{B}C; \quad (39)$$

$$Y_6 = M(0, M(A, B, C), \bar{C}) = ABC; \quad (40)$$

$$Y_7 = M(A, 0, M(\bar{A}, B, C)) = ABC. \quad (41)$$

На рис. 8 представлена логическая схема DEC 3–8 в базе мажоритарных и инверсных элементов, построенная согласно (34)–(41). Заметим, что математическая модель предложенного декодера DEC 3-8 состоит из сложных функций, содержащих одну простую. Это значит, что логическая схема является двухуровневой, причем на первом уровне реализованы две простые функции $M(A, B, C)$ и $M(\bar{A}, B, C)$ с помощью двух мажоритарных элементов и одного инвертора. Как видно из математической модели, благодаря этим простым функциям на втором уровне DEC 3-8 реализуются внешние функции Y_3, Y_5, Y_6, Y_7 . Инвертирование рассматриваемых простых функций $M(A, B, C), M(\bar{A}, B, C)$ позволяет реализовать на втором уровне схемы другие внешние функции: Y_1, Y_2, Y_4 , а также Y_0 . В результате мажоритарный DEC3-8, построенный по (34)–(41), состоит из десяти мажоритарных элементов и пяти инверторов.

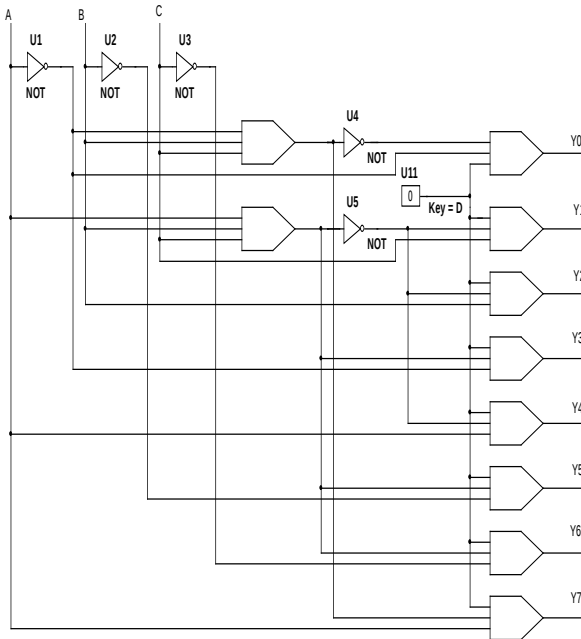


Рис. 8. Логическая схема декодера DEC 3-8 на элементах мажоритарной логики

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку QCA-нанотехнология стремительно развивается, то становятся актуальными вопросы исследования мажоритарной логики. В статье производится классификация мажоритарных функций с тремя переменными на простые и сложные. Согласно данной классификации показаны базовые законы и тождества мажоритарной логики, к тому же преимущественно с доказательствами. Приведенные законы и тождества лежат в основе математического моделирования цифровых мажоритарных схем, выполняющих как вычислительные, так и управляющие операции. Построена математическая модель мажоритарного декодера DEC 3-8, логическая схема которого является двухуровневой и состоит из десяти мажоритарных элементов и пяти инверторов. Предложенный DEC 3-8 может применяться в сложных мажоритарных схемах управления, реализуемых по QCA-нанотехнологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stenishchev I., Gilmulin S., Matveev G., Smirnov N.S., Moskaev D.O., Pishchimova A.A., Rodionov I.A., Basharin A.A. Anharmonicity of quantum meta – atoms due to dynamic anapole state //Physical Review B. 2024. Т. 110. № 3. 035157. DOI: 10.1103/PhysRevB.110.035157.
- [2] Malashin I., Masich I.S., Tynchenko V.S., Borodulin A.S. Optimizing qubit performance through smoothing techniques // Scientific Reports. 2025. Т. 15. № 1. 48. DOI: 10.1038/s41598-024-83877-4.
- [3] Kovalyuk V.V., Venediktov I.O., Sedykh K.O., Svyatodukh S.S., Hydyrova S., Moiseev K.M., Florya I.N., Prokhodtsov A.I., Galanova V.S., Kobtsev D.M., Kuzin A.Yu., Golikov A.D., Goltsman G.N. Waveguide Integrated Superconducting Single - Photon Detector For Photonic And Ion Quantum Processors And Neuromorphic Computing // Radiophysics and Quantum Electronics. 2024. Т. 66. № 11. С.839-892. DOI: 10.1007/s11141-024-10340-9.
- [4] Zheltikov V.A., Platonov D.D., Khydyrova S., Moiseev K.M., Vasilev D.D. Review of superconducting microstrip zingle - photon detectors // Photonics. 2022. Т. 16. № 7. С. 528-537. DOI: 10.22184/1993-7296. FRos. 2022.16.7.528.537.
- [5] Zhalnin V.P., Zubkova A.I., Koroleva Y.P., Shakhnov V.A. Analysis of advanced memristor structures and materials for their manufacture // Proceedings of the III International Conference on Advanced Technologies in Materials Science, Mechanical and Automation Engineering: MIP: Engineering-III – 2021. November 2021. 2402(1):070047. DOI: 10.1063/5.0072133.
- [6] Lent C.S., Tougaw P.D., Porod W. A bistable quantum cell for cellular automata // International Workshop Computational Electronics (IWSE). 1992. С. 163-166.
- [7] Lent C.S., Tougaw P.D., Porod W., Bernstein G.H. Quantum cellular automata // Nanotechnology. 1993. Т. 4. № 1. С. 49-57. DOI: 10.1088/0957-4484/4/1/004.
- [8] Tougaw P.D., Lent C. S. Logical devices implemented using quantum cellular. //Journal of Applied Physics. 1994. Т. 75. № 3. С. 1818-1825. DOI: 10.1063/1.356375.
- [9] Zhang R., Walus K., Wang W., Jullien G.A. A method of majority logic reduction for quantum cellular automata // IEEE Transactions on Nanotechnology. 2004. Т. 3. № 4. С. 443-450. DOI: 10.1109/TNANO.2004.834177.
- [10] Jeon J.-C. Extendable Quantum-Dot Cellular Automata Decoding Architecture Using 5-Input Majority Gate // International Journal of Control and Automation. 2015. Т.8. № 12. С.107-118. DOI: 10.14257/ijca.2015.8.12.10.
- [11] Jeon J.-C. Design of Fixed Cell-Based Programmable Logic Gate Using Quantum-Dot CA for Efficiency and Reliability of Digital Systems // IEEE Access. 2024. Т. 12. С. 187868-187876.
- [12] Bhattacharjee P. K. Digital Combinational Circuits Design By QCA Gates // International Journal of Computer and Electrical Engineering. 2010. Т. 2. № 1. С. 67-72.
- [13] Jayalakshmi R., Amutha R. An Optimized High Input Majority Gate Design in Quantum – Dot Cellular Automata // International Journal of Engineering and Manufacturing Science. 2018. Т. 8. № 1. С. 63-75.

- [14] Закревский А.Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. Москва.: Наука, 1971. 512 С.
- [15] Kong K., Shang Y., Lu R. An Optimized Majority Logic Synthesis Methodology for Quantum-Dot Cellular Automata // IEEE Transactions on Nanotechnology. 2010. Т. 9. № 2. С. 170-183. DOI: 10.1109/TNANO.2009.2028609.
- [16] Parhami B., Abedi D., Jaberipur C. Majority-Logic, its applications, and atomic-scale embodiments // Computers and Electrical Engineering. 2020. Т. 83. № 1. 106562. DOI: 10.1016/j.compeleceng.2020.106562.
- [17] Chetti S.C., Yatgal O. QCA: A survey and design of logic circuits // Global Transitions Proceedings. 2022. Т. 3. № 1. С. 142-148. DOI: 10.1016/j.gltp.2022.04.012.
- [18] Singh R., Singh P. QCA based programmable logic block for implementation of digital circuits in multilayer framework // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. 2025. Т. 123. № 2. 32. DOI: 10.1007/s10470-025-02375-3.
- [19] De D., Purkayastha T., Chattopadhyay T. Design of QCA based Programmable Logic Array using decoder // Microelectronics Journal. 2016. Т. 55. № C. С. 92-107.
- [20] Dongdong L., Tiantian J. Design and Efficiency Enhancement of Polar Encoder Based on Universal Logic Gates Utilizing QCA Technology // Journal of Microelectronics, Electronic Components and Materials. 2025. Т. 55. № 2. С. 87-94. DOI: 10.33180/InfMIDEM2025.202.
- [21] Motalebi F., Sayedsalehi S. Design of Low Power Full-Adder Circuit Using Quantum-dot Cellular Automata // International Journal of Industrial Electronics, Control and Optimization. 2022. Т. 5. № 1. С. 99-108. DOI: 10.22111/ieco.2022.40569.1395.
- [22] Cohn M., Lindaman R. Axiomatic Majority-Decision Logic // IRE Transactions on Electronic Computers. 1961. Т. EC-10. № 1. С. 17-21. DOI: 10.1109/TEC.1961.5219147.
- [23] Lindaman R. A Theorem for Deriving Majority-Logic Networks Within an Augmented Boolean Algebra // IRE Transactions on Electronic Computers. 1960. Т. EC-9. № 3. С. 338-342. DOI: 10.1109/TEC.1960.5219856.
- [24] Akers S. B. Synthesis of combinational logic using three-input majority gates // 3rd Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design (SWCT 1962). Chicago, IL, USA. 1962. С. 149-158. DOI: 10.1109/FOCS.1962.16.
- [25] Варшавский В.И. Трехзначная мажоритарная логика // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 5. С. 673-684.
- [26] Варшавский В. И., Розенблюм Л. Я. О минимизации пирамидальных схем из мажоритарных элементов //Техническая кибернетика. 1964. № 3. С. 24-29.
- [27] Valiant L. Short monotone formulae for the majority function // Journal of Algorithms. 1984. Т. 5. № 3. С. 363–366. DOI: 10.1016/0196-6774(84)90016-6.
- [28] Chattopadhyay A., Amaru L., Soeken M., Gaillardon P.-E., De Micheli G. Notes on Majority Boolean Algebra // IEEE 46th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL). Sapporo, Japan. 2016. С. 50-55. DOI: 10.1109/ISMVL.2016.21.
- [29] Amaru L., Gaillardon P.-E., Chattopadhyay A., De Micheli G. A Sound and Complete Axiomatization of Majority-n Logic // IEEE Transactions on Computers. 2016. Т. 65. № 9. С. 2889-2895. DOI: 10.1109/TC.2015.2506566.
- [30] Testa E., M. Soeken M., Amaru L., Haaswijk W., De Micheli G. Mapping monotone Boolean functions into majority // IEEE Transactions on Computers. 2019. Т. 68. № 5. С. 791-797. DOI: 10.1109/TC.2018.2881245.
- [31] Chattopadhyay A., Bhattacharjee D., Maitra S. Improved Linear Decomposition of Majority and Threshold Boolean Functions // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2023. Т. 42. № 11. С. 3951-3957. DOI: 10.1109/TCAD.2023.3257082.