

Методы статистической линеаризации: обобщенные формальные подходы

Кирилл Р. Чернышев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
myau@ipu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются методы в области корреляционно-статистической линеаризации, применяемой к отображению входных и выходных данных в нелинейных системах. Эта методология рассматривает входные и выходные данные стохастической системы как компоненты в гильбертовом пространстве, используя обобщенное скалярное произведение. Правильный выбор скалярного произведения облегчает использование дисперсионных функций вместо традиционных корреляционных функций при построении линеаризованных моделей. Дисперсионные функции обеспечивают более полное понимание взаимосвязей между случайными процессами по сравнению с корреляционными функциями. Этот подход эффективно устраняет ограничения, связанные с идентификацией нелинейных систем исключительно на основе корреляционных метрик.

Ключевые слова: статистическая линеаризация, нелинейные системы, отображения входов и выходов, меры зависимости, дисперсионные функции

I. ВВЕДЕНИЕ

Статистическая линеаризация, предложенная в работах [1, 2], представляет собой метод идентификации нелинейных систем, основанный на анализе зависимостей между входными и выходными случайными процессами исследуемой системы. Среди мер зависимости в рамках данной методологии наиболее часто используются традиционные корреляционные функции [3]. Книга [4] подробно рассматривает статистическую линеаризацию на основе корреляций, что делает её важнейшим источником для понимания и применения данного метода, как и книга и статья Сочи [5–7]. В целом, статистическая линеаризация была и остаётся как предметом теоретического изучения, так и эффективным инструментом решения практических задач, а также аналитическим инструментом для использования в различных теоретических и прикладных задачах, примеры чего можно найти в работах [8–13]. В свою очередь, хорошо известно, что использование корреляционных функций часто приводит к отрицательным результатам при исследовании нелинейных систем и систем со сложными входными случайными процессами. Это связано с тем, что корреляционные функции могут обращаться в нуль даже при наличии детерминированной связи между входными и выходными процессами рассматриваемой системы [14, 15]. Корреляционные функции могут исчезать даже в случае детерминированной зависимости между входными и выходными процессами [14, 15]. Примеры показывают, что функция взаимной корреляции не отражает реальной зависимости между случайными величинами даже в линейной регрессии [16]. Для устранения негативных явлений в этих случаях

целесообразно использовать приём, предоставляемый привлечением дисперсионных функций [15, 17, 18]. Дисперсионные функции являются более полным инструментом оценки зависимости между входными и выходными процессами стохастической системы и, в частности, позволяют в полной мере учесть детерминированную зависимость между процессами.

II. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Аналогичным подходом к линеаризации является дисперсионная линеаризация [18]. Дисперсионная версия статистической линеаризации включает, наконец, обобщенную дисперсионную функцию трёх случайных процессов $y(t)$, $z(v)$ и $x(s)$.

$$\begin{aligned} \theta_{yzz}(t, v, s) = \\ = \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left(y(t) / x(s) \right) - \mathbf{E} y(t) \right) \times \left(\mathbf{E} \left(z(v) / x(s) \right) - \mathbf{E} z(v) \right), \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{E}(\cdot/\cdot)$ обозначает условное математическое ожидание, $\mathbf{E}(\cdot)$ обозначает математическое ожидание.

В рамках предлагаемого метода линеаризации дисперсии отображение вход-выход исследуемой системы аппроксимируется зависимостью вида

$$y_M(t, u) = \varphi(t) + k \mathbf{E} \left(\dot{x}(t) / x(u) \right), \quad (1)$$

или

$$y_M(t, u) = \varphi(t) + k \mathbf{E} \left(\dot{y}(t) / x(u) \right). \quad (2)$$

Здесь $\dot{\cdot}$ обозначение случайной величины или процесса подразумевает центрирование, т.е. вычитание математического ожидания. Центрированная случайная величина или процесс означает нулевое среднее. В моделях (1) и (2) функции $\varphi = \varphi(t, u)$ и $k = k(t, u)$ определяются относительно критерия точности аппроксимации.

В то же время, представления (1) и (2) расширяют класс моделей, генерируемых традиционной статистической линеаризацией. Это обусловлено тем, что модели (1) и (2) используют нелинейное преобразование фактического входного сигнала системы: условное среднее. Поскольку условное среднее является наилучшей оценкой нелинейного преобразования в смысле среднеквадратичного, метод [18] по сути представляет собой идентификацию нелинейной системы в классе моделей Гаммерштейна, образованных последовательным соединением нелинейных статических и линейных динамических коэффициентов усиления.

Предложенный в статье формализованный подход обеспечивает сохранение класса моделей традиционной стохастической линеаризации, но тем не менее позволяет использовать технику дисперсионной идентификации.

III. КРИТЕРИЙ МИНИМИЗАЦИИ СТАНДАРТНОЙ ОШИБКИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Задача описывает линейное пространство $Z(t, s)$ случайных функций, которые являются функциями двух переменных (t и s), а также случайных величин. Внутри этого пространства определены два линейных подпространства $Y(t)$ и $X(s)$, каждое из которых содержит случайные функции одной переменной (t или s). Аргументы этих функций t и s могут быть действительными числами, а пространства $Y(t)$ и $X(s)$ могут быть одинаковыми, то есть они могут работать с одним и тем же набором аргументов. Пространство, введенное таким образом, $Z_{t,s}$ также является линейным пространством $Z(t, s)$ относительно операций сложения и умножения на функцию Бореля тех же аргументов, которая ограничена для любых фиксированных значений аргументов.

Пусть скалярное произведение будет общего типа

$$\langle z_1(t, s), z_2(t, s) \rangle$$

определено в $Z(t, s)$, а скалярное произведение удовлетворяет следующим условиям. Линейное пространство $Z(t, s)$ является полным метрическим пространством относительно метрик

$$\rho(\bullet, \bullet) = \|\bullet - \bullet\|,$$

с

$$\|z(t, s)\| = \sqrt{\langle z(t, s), z(t, s) \rangle}$$

где ρ – норма, индуцированная скалярным произведением. Что касается $Z(t, s)$, норма всех его элементов предполагается конечной для любых фиксированных t и s . Таким образом, $Z(t, s)$ – гильбертово пространство.

В рамках введенных обозначений рассмотрим задачу аппроксимации неизвестного отображения вход/выход нелинейной системы, описываемой в общем виде (неизвестной) совместной плотностью распределения ее выходных и входных процессов

$$\langle y(t), x(s), p(y, x, t, s) \rangle, \quad (3)$$

с использованием реализаций выходного процесса системы $y(t)$ из пространства $Y(t)$ и входного процесса $x(s)$ из пространства $X(s)$.

В модели аппроксимации вход-выход системы, описываемой плотностью и процессами (3),

$$y_M(t) = \varphi(t) + \int_T g(t, s) \dot{x}(s) ds, \quad (4)$$

нелучайная функция $\varphi(t)$ и весовая функция $g(t, s)$ должны быть определены для удовлетворения условий

$$E y_M(t) = E y(t), \quad (5)$$

$$\|\dot{y}_M(t) - \dot{y}(t)\| \rightarrow \inf_{g(t,s)}. \quad (6)$$

Из соотношений (4)–(6) следуют:

$$\varphi(t) = E y(t) = m_y(t),$$

$$\langle \dot{y}(t), \dot{x}(s) \rangle = \int_T g(t, s) \langle \dot{x}(s), \dot{x}(v) \rangle dv, \quad (7)$$

которые определяют искомые характеристики аппроксимации.

Теперь пусть скалярное произведение в $Z(t, s)$ задается выражением

$$\langle z_1(t, s), z_2(t, s) \rangle = E(z_1(t, s) z_2(t, s)), \quad (8)$$

и пусть A — самосопряженный положительно определенный ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $Z(t, s)$ на себя. Тогда выражение

$$E z_1(t, s) z_2(t, s) = \langle z_1(t, s), z_2(t, s) \rangle_A \quad (9)$$

также определяет скалярное произведение в $Z(t, s)$.

Рассмотрим условное математическое ожидание элементов из $Z(t, s)$ относительно сечения x_u случайного процесса $x(s)$ в точке u . В этом случае линейный оператор A , заданный формулой

$$A z(t, s) = E(z(t, s) / x_u) \quad (10)$$

самосопряженный положительно определенный ограниченный оператор в смысле скалярного произведения (8). Действительно, пусть $p(z_1, t, s)$, $p(z_2, t, s)$, $p(x, u)$, $p(z_1, x, t, s, u)$, $p(z_2, x, t, s, u)$ — предельная и совместная плотности распределения процессов $z_1(t, s)$, $z_2(t, s)$ и $x(u)$. Тогда, согласно (10),

$$\begin{aligned} \langle A z_1(t, s), z_2(t, s) \rangle &= \\ &= \int \int \left[\int z_1 \frac{p(z_1, x, t, s, u)}{p(x, u)} dz_1 \right] z_2 p(z_2, x, t, s, u) dx dz_2 = \\ &= \int \int z_1 \left[\int z_2 \frac{p(z_2, x, t, s, u)}{p(x, u)} dz_2 \right] p(z_1, x, t, s, u) dx dz_1 = \\ &= \langle z_1(t, s), A z_2(t, s) \rangle \end{aligned}$$

Аналогичное утверждение справедливо для множественной регрессии.

$$A z(t, s) = E \{ z(t, s) / x_u, u \in U \}, \quad (11)$$

где U – конечное множество точек на положительной полуоси.

Здесь следует сделать замечание. Конечно, оператор A положительно определена только в том случае, если соответствующее условное среднее в (10) почти наверняка отлично от нуля для всех элементов в $Z(t, s)$, то есть $z(t, s)$ и x_u не являются независимыми. Однако последнее определяется общими предположениями об идентифицируемости исследуемой системы. В общем случае идентифицируемость системы, модель которой описывается отображением входов/выходов, можно рассматривать как следующее условие:

максимальная функция корреляции $S_{yx}(t, s)$ входных и выходных процессов системы

$$S_{yx}(t, s) = \sup_{B, C} \frac{E B \dot{y}(t) C \dot{x}(s)}{\sqrt{\text{var}\{B y(t)\} \text{var}\{C x(s)\}}}$$

не тождественно равен нулю.

Здесь $\text{var}\{\bullet\}$ обозначает дисперсию. Супремум берётся по всем нелинейным преобразованиям, дисперсии которых существуют и не равны нулю. Оптимальные преобразования существуют, если $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2(y, x, t, s)}{p(x, s)p(y, t)} < \infty$ выполняется условие [15, 19, 20].

При условиях (9), (10) в силу свойств дисперсионных функций уравнение (7) принимает вид

$$\theta_{yxx}(t, s, u) = \int_T g(t, v) \theta_{xxx}(s, v, u) dv, \quad (12)$$

где $\theta_{yxx}(t, s, u)$ — обобщенная дисперсионная функция,

$$\theta_{yxx}(t, s, u) = \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left(\frac{y(t)}{x(u)} \right) - \mathbf{E} y(t) \right) \times \\ \times \left(\mathbf{E} \left(\frac{x(s)}{x(u)} \right) - \mathbf{E} x(s) \right),$$

и $\theta_{xxx}(s, v, u)$ являясь обобщенной дисперсионной функцией,

$$\theta_{xxx}(s, v, u) = \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left(\frac{x(s)}{x(u)} \right) - \mathbf{E} x(s) \right) \times \\ \times \left(\mathbf{E} \left(\frac{x(v)}{x(u)} \right) - \mathbf{E} x(v) \right).$$

Функции определяются общим выражением для обобщенной дисперсионной функции, $\theta_{yxx}(t, v, s)$ представленным в разделе II.

При условиях (9), (10) дисперсионные функции в выражении (12) заменяются соответствующими множественными дисперсионными функциями $\theta_{yxx}(t, s, u)$ и $\theta_{xxx}(s, v, u)$.

Когда скалярное произведение в $Z(t, s)$ задано выражениями (9), (10) или (9), (11), критерий линеаризации (6) принимает вид

$$\theta_{ex}(t, u) \rightarrow \inf_{g(t, s)}, \text{ или } \theta_{ex}(t, u) \rightarrow \inf_{g(t, s)}, \quad (13)$$

где $e(t) = y(t) - y_M(t)$ — ошибка линеаризации. Выражение (13) представляет собой форму дисперсионного критерия идентификации [18, 21]. Исходя из этого, предлагаемый подход естественно назвать статистической линеаризацией с дисперсионным критерием.

IV. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ

Полученный подход естественным образом распространяется на статистическую линеаризацию систем с множественными входными процессами $x_1(s), \dots, x_n(s)$, рассматриваемыми как элементы пространства $X(s)$. Следуя постановке задачи, для аппроксимации входно-выходной связи нелинейной системы, описываемой, как и выше, (неизвестной) совместной плотностью распределения выходных и входных процессов,

$$< y(t), x_1(s), \dots, x_n(s), p(y, x_1, \dots, x_n, t, s) >, \quad (14)$$

модель

$$y_M(t) = \varphi(t) + \sum_{i=1}^n \int_T g_i(t, s) \dot{x}_i(s) ds. \quad (15)$$

В модели функции $\varphi(t)$ и $g_i(t, s)$, $i = 1, \dots, n$, подлежат определению из условий

$$\mathbf{E} y_M(t) = \mathbf{E} y(t), \quad (16)$$

$$\|\dot{y}_M(t) - \dot{y}(t)\| \rightarrow \inf_{g_i(t, s), i=1, \dots, n}. \quad (17)$$

Из критерия (16), (17) следуют следующие соотношения:

$$\varphi(t) = \mathbf{E} y(t) = m_y(t),$$

$$\left\langle \dot{y}(t), \dot{x}_i(s) \right\rangle = \\ = \sum_{j=1}^n \int_T g_j(t, s) \left\langle \dot{x}_i(s), \dot{x}_j(v) \right\rangle dv, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

что определяет требуемые характеристики аппроксимации.

Рассмотрим линейный самосопряженный положительно определенный оператор $\mathbf{A}$ отображение $Z(t, s)$ на себя и определяемое соотношением

$$\mathbf{A} z(t, s) = \mathbf{E} \left(z(t, s) / x_{1u}, \dots, x_{nu} \right), \quad (19)$$

где x_{iu} — сечение случайного процесса $x_i(s)$ в точке u , $i = 1, \dots, n$. Тогда при условиях (8), (9), (19) в силу свойств дисперсионных функций уравнения (18) принимают вид

$$\theta_{yxx}(t, s, u) = \sum_{j=1}^n \int_T g_j(t, v) \theta_{x_i x_j \bar{x}}(s, v, u) dv, \\ i = 1, \dots, n,$$

и $\theta_{\dots \bar{x}}(\bullet, \bullet, \bullet)$ представляют собой соответствующие множественные дисперсионные функции, которые определяются множественной регрессией $\mathbf{E}(\bullet / x_{1u}, \dots, x_{nu})$.

V. КРИТЕРИЙ СОВПАДЕНИЯ НОРМ ВЫХОДОВ

Другим критерием выбора функций $\varphi(t)$ и $g(t, s)$ в модели (3) является условие совпадения математических ожиданий и норм выхода системы и модели, т.е.

$$\mathbf{E} y_M(t) = \mathbf{E} y(t), \quad \|\dot{y}_M(t)\| = \|\dot{y}(t)\|, \quad (20)$$

Из критерия (20) следуют следующие соотношения:

$$\varphi(t) = m_y(t),$$

$$\|\dot{y}(t)\|^2 = \int_T \int_T g(t, s) g(t, v) \left\langle \dot{x}(s), \dot{x}(v) \right\rangle ds dv, \quad (21)$$

которые определяют требуемые характеристики аппроксимации.

При условиях (8)–(10) уравнение (21) записывается в виде

$$\theta_{yx}(t, u) = \int_T \int_T g(t, s) g(t, v) \theta_{xxx}(s, v, u) ds dv. \quad (22)$$

При условиях (8), (9), (11) дисперсионные функции в выражении (22) заменяются соответствующими кратными, $\theta_{yxx}(t, u)$ причем $\theta_{xxx}(s, v, u)$.

VI. СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ И ОЦЕНКА ДИСПЕРСИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть теперь $y(t)$ из пространства $Y(t)$ и $x(s)$ из пространства $X(s)$ — стационарные и совместно стационарные в строгом смысле случайные процессы. В этом случае линеаризованная модель ищется в виде

$$y_M(t) = \varphi + \int_0^{\infty} g(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$

при $\tau = t - s$, а весовая функция $g(\tau)$ исчезает при $\tau < 0$. Тогда для стационарной модели окончательно следует

$$\begin{aligned}\varphi &= \mathbf{E}y(t) = m_y, \\ \theta_{yxx}(t - u, v - u) &= \int_0^\infty g(\tau) \theta_{xxx}(t - u - \tau, v - u) d\tau, \\ 0 \leq t < \infty,\end{aligned}$$

где аргументы того времени представлены в форме, которая обеспечивает доказательство представительства, поскольку

$$\begin{aligned}\theta_{yxx}(t - u, v - u) &= \\ &= \mathbf{E} \left(\left(\mathbf{E} \left\{ \dot{y}(t) / x(u) \right\} \right) \times \left(\mathbf{E} \left\{ \dot{x}(v) / x(u) \right\} \right) \right), \\ \theta_{xxx}(t - u - \tau, v - u) &= \\ &= \mathbf{E} \left(\left(\mathbf{E} \left\{ \dot{x}(t - \tau) / x(u) \right\} \right) \times \left(\mathbf{E} \left\{ \dot{x}(v) / x(u) \right\} \right) \right).\end{aligned}$$

В этом разделе следует также отметить наиболее общую дисперсионную функцию – R -функцию [17, 18] стационарных и совместных строго стационарных эргодических *центрированных* случайных процессов $y(t + s + v)$, $z(t + \sigma)$, $x(t + s)$, $w(t)$. В общем случае это функция трёх аргументов (что формально в литературе не указывалось):

$$\begin{aligned}R_{yzxw}(v, \sigma, s) &= \\ &= \mathbf{E} \left(\left(\mathbf{E} \left\{ y(t + s + v) / x(t + s) \right\} \right) \times \left(\mathbf{E} \left\{ z(t + \sigma) / w(t) \right\} \right) \right),\end{aligned}$$

где аргумент “ v ” формируется как $(t + s + v) - (t + s)$, аргумент “ σ ” формируется как $(t + \sigma) - (t)$, а аргумент “ s ” формируется как $(t + s) - (t)$.

VII. Выводы

Предложен единый подход к методам статистической линеаризации. В статье рассматривается описание системы вход/выход. Подход основан на применении положительно определенного ограниченного линейного самосопряженного оператора. Это следует из того, что входные и выходные процессы системы рассматриваются как элементы гильбертова пространства. Самосопряженный оператор может быть разного типа, в частности, его представление на основе дисперсионных функций приводит к уравнениям, определяющим весовую функцию системы именно через дисперсионные функции. Дисперсионные функции являются более подходящими мерами стохастической зависимости по сравнению с корреляционными, при этом последние обращаются в нуль даже в случае детерминированной зависимости между случайными

величинами (процессами). Соответствующие примеры приведены в работах [14, 15] и в ряде других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Booton R.C. “Nonlinear control systems with random inputs”, *Trans. IRE Profes. Group on Circuit Theory*, vol. CT-1, no. 1. 1954, pp. 9-18.
- [2] Kazakov I.E. “An approximate method of statistical investigation of nonlinear systems”, *Proc. Air Force Engineering Academy named after N.E. Zhukovsky*, Moscow, 1954, no. 394. (in Russian)
- [3] Sinitsyn I.N. “Methods of statistical linearization (survey)”, *Automation and Remote Control*, 1974, vol. 35, part 1, pp. 765-776.
- [4] Roberts J.B. and Spanos P.D. *Random Vibration and Statistical Linearization*, Dover, New York, 2003, 464 p.
- [5] Socha L. “Linearization in Analysis of Nonlinear Stochastic Systems: Recent Results – Part I: Theory”, *Applied Mechanics. Reviews*, 2005, vol. 58, no. 3, pp. 178-205.
- [6] Socha L. “Linearization in Analysis of Nonlinear Stochastic Systems: Recent Results – Part II: Applications”, *Applied Mechanics. Reviews*, 2005, vol. 58, no. 5, pp. 303-315.
- [7] Socha L. *Linearization Methods for Stochastic Dynamic Systems*, Lect. Notes Phys. 730, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, 383 p.
- [8] Feng Qian, da Silva L.S.P., Yabin Liao, and Lei Zuo. “Statistical linearization for random vibration energy harvesting with piezoelectric material nonlinearity”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, vol. 188, art. 109985.
- [9] Leparoux C., Bonalli R., Hérisse B., and F. Jean. “Statistical linearization for robust motion planning”, *Systems & Control Letters*, 2024, vol. 189, art. 105825.
- [10] Pomaro B. and P.D. Spanos. “Extended statistical linearization approach for estimating non-stationary response statistics of systems comprising fractional derivative elements”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2023, vol. 74, art. 103471.
- [11] Viet Duc La and Ngoc Tuan Nguyen. “Using statistical linearization to optimize a class of semi-active on-off control in a general state space system”, *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2024, vol. 75, art. 103555.
- [12] Yifei Li, Shujin Li, Dacheng Zheng, and Renjie Han. “Random vibration analysis of nonlinear floating offshore wind turbine system via statistical linearization process under coupled nonlinear wave excitation”, *Ocean Engineering*, 2024, vol. 296, art. 116894.
- [13] Zimmermann S.A., Moberg S., Gunnarsson S., and M. Enqvist. “Using statistical linearization in experiment design for identification of robotic manipulators”, *Control Engineering Practice*, 2024, vol. 150, art. 106008.
- [14] Rényi A. “On measures of dependence”, *Acta Math. Hung.*, vol. 10, No 3-4, 1959, pp. 441-451.
- [15] Rajbman N.S. “Extensions to nonlinear and minimax approaches”, *Trends and Progress in System Identification*, Ed. by P. Eykhoff, Pergamon Press, Oxford, 1981, pp. 185-237.
- [16] Sarmanov O.V. and Z.N. Bratoeva. “Probabilistic Properties of Bilinear Expansions of Hermite Polynomials”, *Theory Probab. Appl.*, 1967, vol. 12, issue 3, pp. 470-481.
- [17] Durgaryan I.S. and F.F. Pashchenko. “Identification of nonlinear plants with complex criteria”, *Automation and Remote Control*, vol. 41, no. 7, 1980, pp. 935-943.
- [18] Пашченко Ф.Ф. Введение в состоятельные методы моделирования систем: в 2 ч. Часть 1. Математические основы моделирования систем. Москва: Финансы и статистика, 2006, 328 p.
- [19] Sarmanov O.V. “The maximal correlation coefficient (nonsymmetric case)”, *Sel. Trans. Math. Statist. Probability*, 1963, vol. 4, pp. 207-210.
- [20] Sarmanov O.V. “Investigation of stationary Markov processes by the method of eigenfunction expansion”, *Sel. Trans. Math. Statist. Probability*, 1963, vol. 4, pp. 245-269.
- [21] Durgaryan I.S. and F.F. Pashchenko. “Dispersion criterion of the statistical optimization of systems”, *Automation and Remote Control*, 1974, vol. 35, part 1, no. 12, pp. 1915-1920.