Непараметрическое оценивание характеристик зависимости в динамических системах

Кирилл Р. Чернышев

Лаборатория идентификации систем им. Н.С. Райбмана
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова

myau@ipu.ru

Аннотация. **В статье вводится мера зависимости, связывающая k пар случайных процессов. Такая мера, основанная на использовании условных математических ожиданий процессов, может рассматриваться как дальнейшее обобщение дисперсионных функций. Сходимость с вероятностью 1 непараметрических оценок такой меры устанавливается на основе выборочных данных. Эти оценки используются для получения выборочных аналогов некоторых нелинейных мер стохастической зависимости случайных процессов, в частности, для получения состоятельной меры зависимости в смысле Колмогорова. Как прямое следствие, будет получена состоятельность меры зависимости в смысле Реньи.**

Ключевые слова: стохастические системы, меры зависимости, сильная состоятельность, нелинейность, непараметрические оценки

I. Введение

В настоящей работе рассматривается задача оценки некоторых мер стохастической зависимости случайных процессов. В общем случае, обычная корреляционная функция является наиболее распространённой мерой стохастической зависимости, но, как известно, она не всегда правильно отражает действительную зависимость между случайными процессами. Это обстоятельство часто является существенным недостатком во многих приложениях. В отличие от обычной корреляционной функции, использование сглаженных значений, основанных, например, на условных математических ожиданиях, приводит к более полной характеристике зависимости. В частности, ковариации условных математических ожиданий известны как дисперсионные функции [1]. В настоящей работе мы вводим меру, связывающую k пар случайных процессов. Такая мера может рассматриваться как дальнейшее обобщение дисперсионных функций, и цель статьи – установить сильную состоятельность, т.е. сходимость с вероятностью 1, их оценок по выборочным данным. Эти оценки применяются для получения выборочных аналогов некоторых нелинейных мер стохастической зависимости случайных процессов.

II. Предварительные данные и постановка задачи

В контексте дисперсионных мер зависимости, упомянутых в предыдущем разделе, обычно используются следующие дисперсионные функции:

$$\theta_{yu}(\tau)=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left({}^{y(t)}\!/_{u(s)}\right)-\mathbf{E}\big(y(t)\big)\right)^2 \text{ при } \tau=t-s;$$

$\theta_{uu}(\tau)=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left({}^{u(t)}\!/_{u(s)}\right)-\mathbf{E}\big(u(t)\big)\right)^2$ при $\tau=t-s$; $\theta_{yzu}(\tau,\sigma)=\mathrm{E}(ce(y,u)\cdot ce(z,u))$ при $ce(y,u)=$ $=\mathbf{E}\left({}^{y(t)}\!/_{u(s)}\right)-\mathbf{E}\big(y(t)\big)$, $ce(z,u)=\mathbf{E}\left({}^{z(v)}\!/_{u(s)}\right)-$ $-\mathbf{E}\big(z(v)\big)$, где $\tau=t-s$ и $\sigma=v-s$.

Здесь $\mathbf{E}(\cdot/\cdot)$ обозначает условное математическое ожидание, а – $\mathbf{E}(\cdot)$ математическое ожидание. Эти функции являются более полными мерами зависимости между случайными процессами по сравнению с обычными корреляционными функциями и, в частности, способны более репрезентативно учитывать стохастическую зависимость между случайными процессами.

Помимо перечисленных, дисперсионная R –функция является наиболее общим типом дисперсионных функций как для стационарных, так и совместно стационарных в строгом смысле эргодических случайных процессов $y(t+s+v)$, $z(t+\sigma)$, $u(t+s)$, $w(t)$ и имеет вид $R_{yzuw}(v,\sigma,s)=\mathbf{E}\Big(\big(ce(z,w)\big)\cdot\big(ce(y,u)\big)\Big)$, при этом $ce(z,w)=\mathbf{E}\left\{{}^{z(t+\sigma)}\!/_{w(t)}\right\}-\mathbf{E}\big(z(\cdot)\big)$, $ce(y,u)=$ $=\mathbf{E}\left\{{}^{y(t+s+v)}\!/_{u(t+s)}\right\}-\mathbf{E}\big(y(\cdot)\big)$.

Наряду с представленными характеристиками можно ввести следующую меру $\theta_{(z_1,u_1)\dots(z_k,u_k)}(\tau_1,\dots,\tau_k)$, которая связывает k пар стационарных и совместно стационарных в строгом смысле эргодических (с нулевым средним для простоты рассмотрения) случайных процессов $z_1(t_1),u_1(s),\dots,z_k(t_k),u_k(s),\tau_i=t_i-s,i=1,\dots,k$ как:

$$\theta_{(z_1,u_1)\dots(z_k,u_k)}(\tau_1,\dots,\tau_k)=\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{k}\mathbf{E}\left\{{}^{z_i(t_i)}\!/_{u_i(s)}\right\}\right). \qquad (1)$$

С точки зрения плотностей распределения вероятностей такая мера имеет вид

$$\theta_{(z_1,u_1)\dots(z_k,u_k)}(\tau_1,\dots,\tau_k)= =\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}z_i\frac{p(z_i,u_i,\tau_i)}{p(u_i)}dz_i\right)p(u_1,\dots,u_k)du_1\dots du_k,$$

где $p(z_i,u_i,\tau_i)$ – совместная плотность распределения случайных процессов $z_i(t_i)$, $u_i(s)$, $\tau_i=t_i-s$, $i=1,\dots,k$; $p(u_i)$ – маргинальная плотность распределения $u_i(s)$, $i=1,\dots,k$; $p(u_1,\dots,u_k)$ — совместная плотность распределения процессов $u_1(s),\dots,u_k(s)$.

Таким образом, целью настоящей работы является получение оценки функции $\theta_{(z_1,u_1)\dots(z_k,u_k)}(\tau_1,\dots,\tau_k)$ (1) по выборочным наблюдениям случайных процессов $z_1(t_1),\ u_1(s),\dots,z_k(t_k),\ u_k(s),\tau_i=t_i-s,i=1,\dots,k$. В рамках данной задачи соответствующая методика является обобщением предложенной в свое время в [2] для оценки указанной выше дисперсионной функции $\theta_{yu}(\tau)$.

III. Оценка Предложенная процедура

Пусть $L^{(n_i)}$, $n_i = 1,2,\ldots$ – последовательности разбиений действительной оси $\mathbf{R}$ на последовательности действительных чисел $U^{(n_i)} = \left\{u_0^{(n_i)},\ldots,u_{\kappa_i(n_i)}^{(n_i)} \middle| -\infty < u_0^{(n_i)} < \cdots < u_{\kappa_i(n_i)}^{(n_i)} < \infty\right\}, i = 1,\ldots,k$, на $\kappa_i(n_i)+2$, $i = 1,\ldots,k$ интервалы вида $l_0^{(n_i)} = \left(-\infty,\, u_0^{(n_i)}\right)$, $l_1^{(n_i)} = \left[u_0^{(n_i)}, u_1^{(n_i)}\right)$, …, $l_{\kappa_i(n_i)}^{(n_i)} = \left[u_{\kappa_i(n_i)}^{(n_i)},\infty\right)$, причем $\kappa_i(n_i)$ являются некоторыми возрастающими натуральными функциями в n_i, $\frac{n_i}{\kappa_i(n_i)} \to 0$ так как $n_i \to \infty$, $i = 1,\ldots,k$.

В рамках этой структуры предполагается, что новые наборы $U^{(n_i)}$ сохраняют все предыдущие элементы предыдущих наборов, по мере того как n_i, $i = 1,\ldots,k$ увеличиваются и

$$\max_{\substack{j \\ j=1,\ldots,\kappa_i(n_i)}} \left(u_j^{(n_i)} - u_{j-1}^{(n_i)}\right) \to 0,\ u_0^{(n_i)} \to -\infty, \quad , \ i = 1,\ldots,k \,. \tag{2}$$

$$u_{\kappa_i(n_i)}^{(n_i)} \to \infty,\ n_i \to \infty$$

В частности, следующие разбиения, заданные последовательностями интервалов $l_j^{(n_1)}, j = 0,1,\ldots,2n_i^{a_i}b_i^{n_i}$: $l_0^{(n_i)} = \left(-\infty,\, -n_i^{a_i}\right)$, $l_j^{(n_i)} = \left[\frac{j-1-n_i^{a_i}b_i^{n_i}}{b_i^{n_i}}, \frac{j-n_i^{a_i}b_i^{n_i}}{b_i^{n_i}}\right)$, $j = 1,\ldots,2n_i^{a_i}b_i^{n_i}$, $l_{2n_i^{a_i}b_i^{n_i}+1}^{(n_i)} = \left[n_i^{a_i},\infty\right)$, $i = 1,\ldots,k$, удовлетворяют указанным выше условиям; а a_i, b_i, $i = 1,\ldots,k$ являются некоторыми константами и $b_i > 1$.

Прямое произведение $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} L^{(n_i)}$ образует разбиение $k-$ размерного пространства $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} \mathbf{R}$ на $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{k} (\kappa_i(n_i)+2)$ $k-$ мерные прямоугольные области $\Pi_{j_1,\ldots,j_k}^{(n_1,\ldots,n_k)} = \left\{(u_1,\ldots,u_k) \middle| u_{j_i-1}^{(n_i)} < u_i < u_{j_i}^{(n_i)},\ i = 1,\ldots,k\right\}$, и, в силу (2), $\max\limits_{\substack{j_i \\ j_i=1,\ldots,\kappa_i(n_i)}} V\left(\overline{\Pi}_{j_1,\ldots,j_k}^{(n_1,\ldots,n_k)}\right) \to 0, n_i \to \infty$, $i = 1,\ldots,k$. Здесь $V(\cdot)$ обозначает объем множества, а $\bar{}$ обозначает замыкание множества.

Пусть $\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}$ – событие, когда значение случайного процесса $u_i(s)$ принадлежит интервалу $l_{j_i}^{(n_i)}$: $u_{j_i-1}^{(n_i)} \le u_i < u_{j_i}^{(n_i)}$, $i = 1,\ldots,k$; $\left\{u_{j_1}^{(n_1)}(s),\ldots,u_{j_k}^{(n_k)}(s)\right\}$ событие состоящее в том, что значение $k-$размерной случайной функции $(u_1(s),\ldots,u_k(s))$ от переменной s принадлежит области $\Pi_{j_1,\ldots,j_k}^{(n_1,\ldots,n_k)}$. Пусть, снова, $\mathbf{P}\{\}$ — вероятность события, $I\{\}$ — индикаторная функция события, то есть $I\{\cdot\} \overset{def}{=} \begin{cases} 1, & \omega \in \{\cdot\} \\ 0, & \omega \notin \{\cdot\} \end{cases}$.

Тогда,

$$\lim_{n_i \to \infty} \frac{\mathbf{E}\left\{z(t_i) I\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}\right\}}{\mathbf{P}\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{z(t_i) \big/ u_i(s)\right\} \text{ почти наверно, } i = 1,\ldots,k \tag{3}$$

где отношение $0/0$ в левой части (3) по определению считается равным нулю.

В свою очередь, поскольку процессы $z_i(t_i)$ и $u_i(s)$, $i = 1,\ldots,k$, являются стационарными, совместно стационарными и эргодическими, то справедливы для всех t_i, $i = 1,\ldots,k$ причем с вероятностью 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T z_i(s+\tau_i) I\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\} ds =$$

$$= \mathbf{E}\left\{z_i(t_i) I\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}\right\},\ \tau_i = t_i - s,\ i = 1,\ldots,k, \tag{4}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\} ds = \mathbf{P}\left\{I\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}\right\} \tag{5}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I\left\{u_{j_1}^{(n_1)}(s),\ldots,u_{j_k}^{(n_k)}(s)\right\} ds =$$

$$= \mathbf{P}\left\{I\left\{u_{j_1}^{(n_1)}(s),\ldots,u_{j_k}^{(n_k)}(s)\right\}\right\},\ i = 1,\ldots,k\,. \tag{6}$$

Пусть

$$\theta_{(z_1,u_1)\ldots(z_k,u_k)}^{(n_1,\ldots,n_k)}(\tau_1,\ldots,\tau_k) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\kappa_1(n_1)+1} \cdots \sum_{j_k=0}^{\kappa_k(n_k)+1} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{E}\left\{z_i(t_i) I\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}\right\}}{\mathbf{P}\left\{u_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\}} \right) \times$$

$$\mathbf{P}\left\{I\left\{u_{j_1}^{(n_1)}(s),\ldots,u_{j_k}^{(n_k)}(s)\right\}\right\},\ \tau_i = t_i - s,\ i = 1,\ldots,k, \tag{7}$$

$$\theta_{(z_1,u_1)\ldots(z_k,u_k)}^{(n_1,\ldots,n_k,T)}(\tau_1,\ldots,\tau_k) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\kappa_1(n_1)+1} \cdots \sum_{j_k=0}^{\kappa_k(n_k)+1} \frac{1}{T} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\int_0^T z_i(s+\tau_i) I\left\{x_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\} ds}{\int_0^T I\left\{x_{j_i}^{(n_i)}(s)\right\} ds} \right)$$

$$\times \int_0^T I\left\{u_{j_1}^{(n_1)}(s), \ldots, u_{j_k}^{(n_k)}(s)\right\} ds\,,\ \tau_i = t_i - s\,,\ i = 1, \ldots, k\,. \quad (8)$$

В силу (3)-(6), $\lim\limits_{\substack{n_1\to\infty\\ \vdots \\ n_k\to\infty}} \theta^{(n_1,\ldots,n_k)}_{(z_1,u_1)\ldots(z_k,u_k)}(\tau_1, \ldots, \tau_k) =$ $= \theta_{(z_1,u_1)\ldots(z_k,u_k)}(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, $\lim\limits_{T\to\infty} \theta^{(n_1,\ldots,n_k,T)}_{(z_1,u_1)\ldots(z_k,u_k)}(\tau_1, \ldots, \tau_k) =$ $= \theta^{(n_1,\ldots,n_k)}_{(z_1,u_1)\ldots(z_k,u_k)}(\tau_1, \ldots, \tau_k)$.

Соотношения (7), (8) подразумевают, как частные случаи, сильно состоятельные оценки всех видов дисперсионных функций, которые, в свою очередь, являются частными случаями дисперсионных R −функций.

Что касается $R-$ функции, $\theta^{(n_1,n_2,T)}_{(y,u)(z,w)}(v,\sigma,s) =$
$$= \sum_{j_1=0}^{\kappa_1(n_1)+1} \sum_{j_2=0}^{\kappa_2(n_2)+1} \frac{1}{T} \frac{\int_0^T y(\tau+s+v) I\left\{x_{j_1}^{(n_1)}(\tau+s)\right\} d\tau}{\int_0^T I\left\{x_{j_1}^{(n_1)}(\tau+s)\right\} d\tau} \times$$
$$\frac{\int_0^T z(\tau+\sigma) I\left\{w_{j_2}^{(n_2)}(\tau)\right\} d\tau}{\int_0^T I\left\{w_{j_2}^{(n_2)}(\tau)\right\} d\tau} \times \int_0^T I\left\{u_{j_1}^{(n_1)}(\tau+s), w_{j_2}^{(n_2)}(\tau)\right\} d\tau$$, и $\lim\limits_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}} \theta^{(n_1,n_2)}_{(y,u)(z,w)}(v,\sigma,s) = \theta_{(y,u)(z,w)}(v,\sigma,s)$, одновременно $\lim\limits_{T\to\infty} \theta^{(n_1,n_2,T)}_{(y,u)(z,w)}(v,\sigma,s) = \theta^{(n_1,n_2)}_{(y,u)(z,w)}(v,\sigma,s)$.

IV. Применение процедуры оценки к почти состоятельной мере зависимости

Согласно терминологии, предложенной А.Н. Колмогоровым [3], мера зависимости между двумя случайными величинами называется состоятельной, если она обращается в нуль тогда и только тогда, когда случайные величины стохастически независимы. С другой стороны, А. Реньи [4] предложил набор аксиом, которым должна удовлетворять мера зависимости. Эти аксиомы накладывают существенные ограничения на понятие меры зависимости, и, соответственно, этот класс значительно уже колмогоровского. Естественно, что этот класс мер зависимости следует называть состоятельными в смысле Реньи.

Для выполнения большинства аксиом статьи [4] в статье [5] были сделаны ограничительные предположения относительно исследуемых процессов, а именно рассматривались знакопостоянные процессы, т.е. процессы, которые не меняют свой знак с вероятностью 1. Для этих процессов величина $\lambda_{yx}(\tau)$определяется как

$$\lambda_{yx}(\tau) = \sqrt[4]{\frac{\mathbf{var}\left(\mathbf{E}\left\{ y^2(t) / x(s) \right\}\right) - 2C_{yx}(\tau)}{\mathbf{var} y^2(t) - 2C_{yx}(\tau)}}\,, \quad (9)$$

где $C_{yx}(\tau) = \mathbf{cov}\left\{\left(\mathbf{E}\left\{{y(t)}/{x(s)}\right\}\right)^2, \mathbf{var}\left\{{y(t)}/{x(s)}\right\}\right\}$.

$\lambda_{yx}(\tau)$ можно эффективно рассчитать с использованием выборочных данных в соответствии с методологией, полученной в предыдущем разделе.

С точки зрения плотностей распределения вероятностей соответствующие величины в (9) имеют (в общем случае) вид

$$\mathbf{E}\left\{ y(t) / x(s) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_\tau(y \mid x) dy \quad (10)$$

$$\mathbf{var}\left\{ y(t) / x(s) \right\} =$$
$$= \mathbf{var}\left\{ \left(y(t) - \mathbf{E}\left\{ y(t) / x(s) \right\}\right)^2 / x(s) \right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \int_{-\infty}^{\infty} y p_\tau(y \mid x) dy \right)^2 p_\tau(y \mid x) dy\,, \quad (11)$$

$$\mathbf{var}\left\{\mathbf{E}\left\{ y(t) / x(s) \right\}\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{ y(t) / x(s) \right\} - \mathbf{E}(y(t))\right\}^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y p_\tau(y \mid x) dy - \mathbf{E}(y(t)) \right]^2 p(x) dx\,, \quad (12)$$

и $p_\tau(y|x) = \frac{p(y,x,\tau)}{p(x)}$ – условная плотность распределения вероятностей $y(t)$ относительно $x(s)$; а $p(x)$, $p(y)$, $p(y,x,\tau)$, $\tau = t - s$ обозначают совместную и маргинальные плотности распределения случайных процессов $x(s)$ и $y(t)$, соответственно.

Примечание: Конечно, при рассмотрении случайных знакопостоянных процессов, скажем, положительных, нижние пределы интегрирования в приведенных выше интегральных выражениях (10)–(12) автоматически заменяются нулями.

В приведенном выше $\lambda_{yx}(\tau)$ (9) значения $\mathbf{var}\left(\mathbf{E}\left\{{y^2(t)}/{x(s)}\right\}\right)$ и $C_{yx}(\tau)$ в соответствии с выражениями (10)–(12) можно представить следующим образом

$$\mathbf{var}\left(\mathbf{E}\left\{ y^2(t) / x(s) \right\}\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{ y^2(t) / x(s) \right\}\right)^2 - \left(\mathbf{E}\left(y^2(t)\right)\right)^2 =$$
$$= \Phi_{1yx}(\tau) - \left(\mathbf{E} y^2(t)\right)^2\,, \quad (13)$$

$$C_{yx}(\tau) = \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{E}\left\{ y(t)/x(s) \right\}\right)^2 \cdot \mathbf{E}\left\{ y^2(t)/x(s) \right\}\right) -$$

$$-\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{ y(t)/x(s) \right\}\right)^2\right) \cdot \mathbf{E}\left(y^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{ y(t)/x(s) \right\}\right)^4 +$$

$$+\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{ y(t)/x(s) \right\}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \Phi_{2yx}(\tau) - \Phi_{3yx}(\tau) \cdot \mathbf{E}y^2(t) - \Phi_{4yx}(\tau) + \left(\Phi_{3yx}(\tau)\right)^2 . \quad (14)$$

Таким образом, суть задачи оценивания $\lambda_{yx}(\tau)$ по выборочным данным состоит в оценке членов $\Phi_{lyx}(\tau)$, $l = 1, \dots, 4$ в (13) и (14), содержащих соответствующие условные средние значения. В свою очередь, для оценки $\Phi_{lyx}(\tau)$ $l = 1, \dots, 4$ введённых таким образом функций, представленный выше подход может быть применён к функции $\theta_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau)$.

Таким образом, в соответствии с приведенным выше общим случаем $\theta^{(n)}_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau)$ можно применить следующую оценку: $\theta_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau)$

$$\theta^{(n)}_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa(n)+1} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\mathbf{E}\left\{z_i(t_i) I\left\{u_j^{(n)}(s)\right\}\right\}}{\mathbf{P}\left\{u_j^{(n)}(s)\right\}} \right) \mathbf{P}\left\{u_j^{(n)}(s)\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa(n)+1} \frac{\prod_{i=1}^{k} \mathbf{E}\left\{z_i(t_i) I\left\{u_j^{(n)}(s)\right\}\right\}}{\left(\mathbf{P}\left\{u_j^{(n)}(s)\right\}\right)^{k-1}} ,$$

$$\theta^{(n,T)}_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau) = \sum_{j=0}^{\kappa(n)+1} \frac{1}{T} \frac{\prod_{i=1}^{k} \left(\int_0^T z_i(s+\tau) I\left\{x_j^{(n)}(s)\right\} ds \right)}{\left(\int_0^T I\left\{x_j^{(n)}(s)\right\} ds \right)^{k-1}} .$$

Таким образом, в силу (3)–(6) и этих двух последних формул, $\lim_{n\to\infty}\lim_{T\to\infty} \theta^{(n,T)}_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau) = \theta_{(z_1,u)\dots(z_k,u)}(\tau)$ почти наверняка.

Из этого рассуждения непосредственно вытекают соответствующие формулы для вычисления функций $\Phi_{lyx}(\tau)$, $l = 1, \dots, 4$.

Полученные таким образом формулы используются для построения выборочных оценок меры зависимости (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] HN.S. Rajbman, “Extensions to nonlinear and minimax approaches,” Trends and Progress in System Identification, Ed. by P. Eykhoff, Pergamon Press, Oxford, pp. 185-237, 1981.

[2] P. Varlaki and L. Seidl, “Estimating the variance functions of ergodic stochastic processes,” Automation and Remote Control, vol. 44, no. 6, part 1, pp. 737-739, 1983.

[1] Сарманов О.В., Захаров В.К. Меры зависимости между случайными величинами и спектры стохастических ядер и матриц, Matematicheskiy Sbornik, vol. 52(94), pp. 953–990, 1960.

[3] A. Rényi, “On measures of dependence,” Acta Acad. Sci.Math. Hung, vol. 10 (3-4), pp. 441-451, 1959.

[4] F.A. Ovsepyan and D.M. Lepsky, “On identification of nonlinear nonparametric control systems,” 10th IFAC World Congress Preprints, vol. 10, pp. 237-241, 1987.